Übung 5

Derivationen, lineare Abbildungen, Differenzierbarkeit

13. März 2024

Aufgabe 11

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass die Abbildung

$$A_f : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad g \mapsto g \circ f$$

ein Algebrahomomorphismus ist, d.h. eine lineare Abbildung für die zudem für alle $g, h \in C(\mathbb{R})$ gilt, dass $A_f(g \cdot h) = A_f(g) \cdot A_f(h)$.

(b) Sei $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Zeige, dass

$$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'$$

eine Derivation ist.

Hinweis: Die Derivation D ist nicht beschränkt. Deshalb ist nicht klar, wie man $\exp(D)$ definieren kann. In Aufgabe 13 (d) wird gezeigt, dass $\exp(D)$ ein Algebrahomomorphismus ist, wenn man $\exp(D)$ definieren kann. Wenn f eine ganzanalytische Funktion ist, so kann man $\exp(D)(f)(x)$ ausrechnen und sieht, dass diese Reihe konvergiert. Berechne den Grenzwert.

Aufgabe 12
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : X \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, X),\ v \mapsto (x \mapsto v \cdot x).$$

a) Zeige, dass Ψ linear ist.
b) Zeige, dass die Umkehrabbildung von Ψ gegeben ist durch

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}, X) \to X,\ A \mapsto A(1).$$

c) Zeige, dass Ψ eine isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 13

Sei $\mathcal{A}$ eine normierte Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} f_2 &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^2, \\ f_3 &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^3, \\ f_n &: \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad A \mapsto A^n. \end{aligned}$$

a) Begründe, warum f_i für $i = 2, 3, n$ differenzierbar ist. Gebe zudem den Raum an, der $f_i'(A)$ als Element enthält.

b) Bestimme die Ableitung von f_i für $i = 2, 3, n$ an der Stelle A in Richtung B.