Übung 4

Stetigkeit, Norm und Vollständigkeit

06. März 2024

Aufgabe 7 Zeige, dass für die Folge

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} & \text{falls } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

und die Funktion

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $||f_n - f||_1 < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Bemerkung: Daraus folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in der 1-Norm ist, und damit eine Cauchyfolge in $C^1([-1,1],\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 8

Zeige, dass $f \notin C^1([-1,1],\mathbb{R})$ gilt und daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Bemerkung: Daraus folgt, dass der normierte Vektorraum nicht vollständig ist.

Aufgabe 9 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist $C_b(X, \mathbb{R})$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass die Abbildung

$$A : C_b(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A(f) = f(x_0)$$

linear und stetig ist.

Aufgabe 10 Betrachte den normierten Vektorraum $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Zeige, dass für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ mit

$$A(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$$

gilt, dass $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$.

(b) Gilt $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$?