Übung 3

Stetigkeit, Norm und Vollständigkeit

28. Februar 2024

Aufgabe 5 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die Folge genau dann gegen den Grenzwert x konvergiert, wenn die Abbildung

$$\phi\colon \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X,$$
$$\begin{cases} n \mapsto x_n, \\ \infty \mapsto x \end{cases}$$

bezüglich der beliebigen Metrik d in X und der Metrik aus Beispiel 9.2 (v) auf $\bar{\mathbb{N}}$ stetig ist.

Wir betrachten die zwei Vektorräume $C^1([-1,1],\mathbb{R})$ und den Vektorraum aller Regelfunktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ bezüglich der Abbildung

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Aufgabe 6 Zeige, dass die Abbildung keine Norm bezüglich der Regelfunktionen ist.
[Tipp: Betrachte zwei Funktionen, die sich nur an einer Stelle unterscheiden.]

Aufgabe 7 Zeige, dass für die Folge

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}x + \frac{1}{2} & \text{falls } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{falls } x \geq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

und die Funktion

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $||f_n - f||_1 < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Bemerkung: Daraus folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in der 1-Norm ist, und damit eine Cauchyfolge in $C^1([-1,1],\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 8

Zeige, dass $f \notin C^1([-1,1],\mathbb{R})$ gilt und daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

Bemerkung: Daraus folgt, dass der normierte Vektorraum nicht vollständig ist.