Übung 2

Zur diskreten Metrik

21. Februar 2024

Zur diskreten Metrik

Aufgabe 3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass alle endlichen Teilmengen von X kompakt sind.

Aufgabe 4 Wir betrachten den metrischen Raum (X, d), wobei d die diskrete Metrik ist.

(a) Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann in (X, d) konvergiert, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $x_n = x_N$.

(b) Zeige, dass eine Teilmenge $M \subseteq X$ genau dann kompakt ist, wenn sie endlich ist.

(c) Folgere aus (b), dass in einem unendlichen diskreten Raum nicht alle abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen kompakt sind.

Aufgabe 5 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die Folge genau dann gegen den Grenzwert x konvergiert, wenn die Abbildung

$$\phi \colon \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X,$$
$$\begin{cases} n \mapsto x_n, \\ \infty \mapsto x \end{cases}$$

bezüglich der beliebigen Metrik d in X und der Metrik aus Beispiel 9.2 (v) auf $\bar{\mathbb{N}}$ stetig ist.