Kapitel 5

Nichtlineare elliptische Theorie

5.1 Quasilineares Dirichletproblem

Das Ziel dieses letzten Kapitels ist der Beweis der Existenz einer Lösung des Plateuaproblems, also des Dirichletproblems von der Minimalflächengleichung. Wir beutzen dabei Methoden mit denen sich viele sogenannte quasilineare elliptische Differentialgleichungen lösen lassen. Dabei nennen wir eine Differentialgleichung quasilinear elliptisch, wenn sie als lineare elliptische Differentialgleichung geschrieben werden kann, die Koeffizienten aber nicht nur von $x \in \Omega$ sondern auch von $u(x)$ und von $\nabla u(x)$ abhängen. Wir unterscheiden also wieder zwischen quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen in Divergenzform und in Nicht-Divergenzform. Weil wir für die Lösung des Plateauproblems Aussagen über schwache Lösungen mit Schauderabschätzungen kombinieren, werden wir in diesem Abschnitt auch beide Formen betrachten. Die Abhängigkeit der Koeffizienten von x, $z = u(x)$ und $p = \nabla u(x)$ beschreiben wir dabei durch Funktionen auf $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die entweder stetig, oder hölderstetig oder auch stetig differenzierbar sind. Da eine lineare Abhängigkeit immer unendlich oft differenzierbar ist, ist die Klasse von quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen größer, als die im letzten Kapitel betrachteten linearen elliptischen Differentialgleichungen. Weil für quasilineare elliptische Differentialgleichungen im wesentlichen nur die Abhängigkeit von den zweiten Ableitungen eingeschränkt ist, können wir sie in folgende Form bringen:

$$\text{Nicht-Divergenzform: } \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_i \partial_j u(x) + b(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad (5.1)$$

$$\text{Divergenzform: } \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \big((a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_j u(x) \big) + b(x, u(x), \nabla u(x)) = 0. \quad (5.2)$$

Die Minimalfächengleichung gehört tatsächlich zu diesen beiden Klassen: Wegen

$$\nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \left(\triangle u - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u}{1 + (\nabla u)^2} \right) = 0.$$

ist sie die quasilineare elliptische Differentiagleichung in Nicht-Divergenzform zu der $n \times n$-Matrix $a(x,z,p) = (1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{1} - (1+|p|^2)^{-1} p \cdot p^T)$ und $b(x,z,p) = 0$. Ohne den Vorfaktor $(1+|p|)^{-\frac{1}{2}}$ vereinfacht sich a zu $a = \mathbb{1} - (1+|p|^2)^{-1} p \cdot p^T$. Diese Matrix ist auf dem orthogonalen Komplement von p gleich $\mathbb{1}$ und p ist ein Eigenvektor mit Eigenwert $\frac{1}{1+|p|^2}$. Solange $|p|$ beschränkt ist, ist also a als symmetrische Bilinearform nach unten beschränkt durch $(1+\sup|p|^2)^{-1}\mathbb{1}$ und alle Einträge sind kleiner oder gleich 1.

Mit $a(x,z,p) = (1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}$ und $b(x,z,p) = 0$ ist sie eine quasilineare elliptische Differenzialgleichung in Divergenzform. Als symmetrische Bilinearform ist a also $(\sup|p|^2)^{-\frac{1}{2}}$ mal der euklidischen Bilinearform mit durch 1 beschränkten Koeffizienten.

In beiden Fällen hängt a nur von p ab und b verschwindet. Das vereinfacht die Untersuchung des entsprechenden Dirichletproblems. Es lassen sich aber auch andere quasilineaere elliptische Differentialgleichungen mit ähnlichen Methoden lösen.

Der Satz von Leray-Schauder 3.8 erlaubt es auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einem Randwert φ das entsprechende Dirichletproblem zu (5.1) zu lösen. Wir wählen einen geeigneten Funktionenraum $X \supset C^1(\bar{\Omega})$ über Ω, so dass für alle $v \in X$ das entsprechende lineare elliptische Dirichletproblem mit Randwert $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ zu

$$u \mapsto Lu = \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot, v, \nabla v)\partial_i\partial_j u + b(\cdot, v, \nabla v) = 0 \tag{5.3}$$

die Voraussetzungen der Existenz von klassischen Lösungen des Dirichletproblems 4.20 erfüllt. Dadurch erhalten wir zu jedem $v \in X$ eine entsprechende Lösung $u = T(v)$ des Dirichletproblems. Wenn diese Lösungen in dem Funktionenraum X liegen, definiert das eine (nichtlineare) Abbildung $T : X \to X$. Für alle $\sigma \in [0,1]$ ist v genau dann ein Fixpunkt von σT, wenn v mit Randwert $v = \sigma T(v) = \sigma\varphi$ das Dirichletproblem zu

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot, v, \nabla v)\partial_i\partial_j v = \sigma \sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\cdot, v, \nabla v)\partial_i\partial_j T(v) = -\sigma b(\cdot, v, \nabla v) \tag{5.4}$$

löst. Wenn also für einen gegebenen Randwert φ eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass das entsprechende Dirichletproblems zu (5.4) eindeutig lösbar ist, und die Lösungen u in X uniform beschränkt sind, dann besitzt wegen dem Satz von Leray-Schauder 3.8 die Abbildung T einen Fixpunkt, und damit das ursprüngliche quasilineare elliptische Dirichletprobblem eine Lösung. Diese Strategie führt zu folgendem Satz:

Satz 5.1. *Seien $\alpha \in (0,1)$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und für alle $\lambda > 0$ auf $\Omega \times B(0,\lambda)$ mit den entsprechenden Bällen $B(0,\lambda) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die Koeffizienten*

$$\begin{gathered} a_{ij}, b \in C^{0,\alpha}(\Omega \times B(0,\lambda)) \text{ mit } \|a_{ij}, b\|_{C^{0,\alpha}(\Omega \times B(0,\lambda))} \le \Lambda(\lambda), \\ \sum\nolimits_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j \ge \tfrac{|\xi|^2}{\Lambda(\lambda)} \text{ für } (x,z,p,\xi) \in \Omega \times B(0,\lambda) \times \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Wenn jede Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems zu (5.4) mit $u = \sigma\varphi$ auf $\partial\Omega$

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\Omega)} \le M \qquad \text{für ein } \beta \in (0,1) \text{ und ein } M > 0 \text{ und alle } \sigma \in [0,1] \tag{5.6}$$

erfüllt, dann hat das entsprechende Dirichletrpoblem zu (5.1) eine Lösung.

Beweis: Für jedes $v \in X = C^{1,\beta}(\Omega)$ erfüllen die Koeffizienten von (5.3) wegen (5.5)

$$\begin{aligned}&|a_{ij}(x, v(x), \nabla v(x)) - a_{ij}(y, v(y), \nabla v(y))| \le \\ &\le \Lambda(\|v\|_{C^{1,\beta}(\Omega)})\, |(x, v(x), \nabla v(x)) - (y, v(y), \nabla v(y))|^\alpha \le C(\Lambda, \|v\|_{C^{1,\beta}(\Omega)}, \Omega, \beta)|x-y|^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Also liegen sie in $a_{ij}(\cdot, v, \nabla v), b(\cdot, v, \nabla v) \in C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$ und erfüllen die Voraussetzungen der Existenz von klassischen Lösungen des Dirichletproblems 4.20. Das entsprechende Dirichletproblem mit $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ hat genau eine Lösung in $u \in C^{2,\alpha\beta}(\Omega)$. Es bleibt zu zeigen, dass $T : C^{1,\beta}(\Omega) \to C^{2,\alpha\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\Omega)$ mit $T(v) = u$ die Voraussetzungen des Satzes von Leray-Schauder 3.8 erfüllt. Wegen (5.6) sind die Fixpunkte von σT für alle $\sigma \in [0,1]$ uniform beschränkt. Wegen (4.30) bildet T beschränkte Teilmengen von $C^{1,\beta}(\Omega)$ auf beschränkte Teilmengen von $C^{2,\alpha\beta}(\Omega)$, deren Abschluss in $C^2(\bar{\Omega})$ und $C^{1,\beta}(\Omega)$ wegen Proposition 3.13 kompakt sind. Also muss nur die Stetigkeit von T gezeigt werden. Sei also v_m eine Folge in $C^{1,\beta}(\Omega)$, die gegen v konvergiert. Wegen

$$|a_{ij}(x,v(x),\nabla v(x)) - a_{ij}(x,v_m(x),\nabla v_m(x))| \le \Lambda\big(\max\{\|v\|_{C^{1,\beta}(\Omega)}, \|v_m\|_{C^{1,\beta}(\Omega)}\}\big)\, \|v - v_m\|^\alpha_{C^{1,\beta}(\Omega)}$$

konvergieren $a_{ij}(\cdot, v_m, \nabla v_m)$ und genauso auch $b(\cdot, v_m, \nabla v_m)$ in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen $a_{ij}(\cdot, v, \nabla v)$ und $b(\cdot, v, \nabla v)$. Dann ist $T(v)$ der einzige Häufungspunkt von $T(v_m)$ in $C^2(\bar{\Omega})$. Dort und damit auch in $C^{1,\beta}(\Omega)$ konvergiert $T(v_m)$ also gegen $T(v)$. Also ist T stetig.**q.e.d.**

Insgesamt folgt also die Existenz einer Lösung des quasilinearen Dirchletproblems zu (5.1) aus der Abschätzung (5.6) für alle Lösungen des Dirichletproblems zu (5.4) mit Randwert $\sigma\varphi$. Diese Abschätzung zeigen wir nacheinander in den folgenden Schritten:

1. Abschätzung von $\sup_\Omega |u|$.
2. Abschätzung von $\sup_{\partial\Omega} |\nabla u|$ durch $\sup_\Omega |u|$.
3. Abschätzung von $\sup_\Omega |\nabla u|$ durch $\sup_{\partial\Omega} |\nabla u|$ und $\sup_\Omega |u|$.
4. Abschätzung von $\text{höl}_{\Omega,\beta} |\nabla u|$ durch $\sup_\Omega |\nabla u|$ und $\sup_\Omega |u|$.

1. Der erste Schritt folgt aus dem Schwachen Maximumrpinzip 2.13 oder 4.2.
2. Für den zweiten Schritt nehmen wir an, dass die Koeffizienten a_{ij} und b in (5.1) nur von $p = \nabla u$ abhängen, und Ω und φ eine beschränkte Steigung haben. Die zweite Bedingung besagt, dass es für alle $y \in \partial\Omega$ zwei Polynome ersten Grades $p_y^\pm$ gibt mit

$$p_y^\pm(y) = \varphi(y), \qquad p_y^-(x) \le \varphi(x) \le p_y^+(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega, \qquad \sup_{y\in\partial\Omega} |\nabla p_y^\pm| < \infty$$

Weil $\nabla p_y^\pm$ konstant sind, erzwingen beide Bedingungen zusammen, dass $p_y^\pm$ und $u - p_y^\pm$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Wegen dem Schwachen Maximumprinzip folgt zuerst $p_y^-(x) \leq u(x) \leq p_y^+(x)$ für alle $x \in \Omega$, dann $|\nabla u(y)| \leq \max\{|\nabla p_y^-|, |\nabla p_y^+|\}$ für alle $y \in \partial\Omega$ und zuletzt $\sup_{x\in\partial\Omega} |\nabla u(x)| \leq \sup_{y\in\partial\Omega} \max\{|\nabla p_y^-|, |\nabla p_y^+|\}$.

Übungsaufgabe 5.2. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}$ offen und $R > 0$, so dass es für jedes $y \in \partial\Omega$ ein $y \in \partial B(y, R)$ mit $\Omega \subset B(y, R)$ gibt. Dann haben alle $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ beschränkte Steigung.*

3. Für die letzten beiden Schritte zeigen wir zuerst, dass alle ersten partiellen Ableitungen $\partial_l u$ eine lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform lösen. Dafür schreiben wir die zweiten Ableitungen als Divergenz eines Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot A(\cdot, u, \nabla u) + B(\cdot, u, \nabla u) = 0, \quad A \in (C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n))^n, B \in C(\bar{\Omega}, \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \quad (5.7)$$

Für $v \in C_0^2(\Omega)$, $l = 1, \ldots, n$ und $w = \partial_l u$ folgt mit $a_{ij}(x, z, p) = \frac{\partial A_i}{\partial p_j}(x, z, p)$ aus (5.7)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}(\cdot, u, \nabla u,)\partial_j w \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l \partial_j u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \left(\partial_l A(\cdot, u, \nabla u) - \frac{\partial A}{\partial x_l}(\cdot, u, \nabla u) - \frac{\partial A}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l u \right) \cdot \nabla v \,\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Omega \nabla \cdot \left(\partial_l A(\cdot, u, \nabla u) - \frac{\partial A}{\partial x_l}(\cdot, u, \nabla u) - \frac{\partial A}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l u \right) v \,\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Omega \partial_l \nabla \cdot A(\cdot, u, \nabla u) v \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \nabla \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x_l}(\cdot, u, \nabla u) + \frac{\partial A}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l u \right) v \,\mathrm{d}\mu \qquad (5.8) \\
&= \int_\Omega \left(\partial_l B(\cdot, u, \nabla u) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial x_l}(\cdot, u, \nabla u) + \frac{\partial A}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l u \right) \right) v \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \nabla \cdot f_l v \,\mathrm{d}\mu \quad \text{mit } f_{lk} = \delta_{lk} B(\cdot, u, \nabla u) + \frac{\partial A_k}{\partial x_l}(\cdot, u, \nabla u) + \frac{\partial A_k}{\partial z}(\cdot, u, \nabla u)\partial_l u.
\end{aligned}$$

Wenn wir (5.7) umschreiben in eine Differentiagleichung in Nicht-Divergenzform, dann ist die $n \times n$-Matrix a dabei genau die Koeffizienten Matrix der zweiten Ableitungen. Bei der Minimalflächengleichung hängt A nur von $p = \nabla u$ ab und B verschindet, so dass auch f_l verschwindet. Außerdem erfüllen die entsprechenden Differentialgleichungen für $\partial_l u$ die Voraussetzungen des Schwachen Maximumprinzips. In diesem Fall folgt also der dritte Schritt wieder aus dem Schwachen Maximumprinzip (4.2).

4. Wir benötigen eine Abschätzung von $\text{höl}_{\Omega,\beta} \nabla u$ für alle Lösungen u des Dirichletproblems zu (5.4) mit Randwert $\sigma\varphi$. Weil $w = \partial_l u$ eine schwache Lösung einer linearen elliptischen Differentialgleichung ist, kehren wir im nächsten Abschnitt zu der linearen elliptischen Theorie zurück und beweisen die Hölderstetigkeit der schwachen Lösungen. Dieses tiefe Ergebnis fügt sich ganz natürlich in die lineare elliptische Theorie ein. Seine Bedeutung liegt allerdings in der Anwendung auf nichtlineare elliptische Probleme.

5.2 Hölderstetigkeit von schwachen Lösungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir auf einem offenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ das lokale Verhalten der schwachen Lösungen der linearen elliptischen Differentialgleichungen in Divergenzform aus Abschnitt 4.1. Die Differentialgleichung schreiben wir wie in (5.7):

$$\nabla \cdot A(\cdot, u, \nabla u) + B(\cdot, u, \nabla u) = 0 \quad \text{mit} \tag{5.9}$$
$$A(x, z, p) = (a(x) \cdot p + b(x)z - f(x), \quad B(x, z, p) = c(x) \cdot p + d(x)z - g(x)$$

für alle $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}^n$. Hierbei sind die Koeffizienten $a : \Omega \to n \times n$-Matrizen, $b, c, f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $d, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Inhomogenität der schwachen Lösungen wird hier durch $-(\nabla \cdot f + g)$ beschrieben, was dem negativen der Inhomogenität in Definition 4.1 entspricht. Zusätzlich zu (4.2)-(4.3) setzen wir folgendes voraus und definieren:

$$f \in (L^q(\Omega))^n, \quad g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega) \quad \text{für ein} \quad n < q < \infty, \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered} \bar{a} := \|a\|_{L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))}, \;\; \bar{z} := |z| + k, \;\; \bar{b} := 2(|b|^2 + |c|^2 + k_R^{-2}|f|^2) + |d| + k_R^{-1}|g| \\ \text{mit } \; k_R = k(R) := R^\delta \|f\|_{L^q(\Omega)} + R^{2\delta} \|g\|_{L^{\frac{q}{2}}(\Omega)}, \text{ für } R > 0 \text{ und } \delta = 1 - \tfrac{n}{q}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Aus (4.2) folgt für alle $0 \leq \varepsilon \leq 1$ und $k \geq k(R)$

$$\begin{aligned} |A(x, z, p)| &\leq \bar{a}|p| + |b| \cdot |z| + |f| \leq \bar{a}|p| + \bar{b}^{\frac{1}{2}} \bar{z}, \\ p \cdot A(x, z, p) &\geq \Lambda^{-1}|p|^2 - |p|(|b| \cdot |z| + |f|) \geq \tfrac{1}{2}\big(\Lambda^{-1}|p|^2 - \Lambda \bar{b}\bar{z}^2\big), \\ |\bar{z}B(x, z, p)| &\leq |z|\big(|c| \cdot |p| + |d| \cdot |z| + |g|\big) \leq \tfrac{\varepsilon}{8}|p|^2 + \tfrac{1}{\epsilon}\bar{b}\bar{z}^2, \end{aligned} \tag{5.12}$$

wobei wir $(|b| + k_R^{-1}|f|)^2 = |b|^2 + 2|b|k_R^{-1}|f| + k_R^{-2}|f|^2 \leq \bar{b}$, $|p|\bar{b}^{\frac{1}{2}}\bar{z} \leq \frac{1}{2}(\Lambda^{-1}|p|^2 + \Lambda\bar{b}\bar{z}^2)$, $|z| \cdot |c| \cdot |p| \leq \frac{\varepsilon}{8}|p|^2 + \frac{2}{\varepsilon}|c|^2|z|^2$ bzw. $|z|\big(|d| \cdot |z| + |g|\big) \leq |z|\bar{z}\big(|d| + k_R^{-1}|g|\big)$ benutzt haben. Die entsprechenden Ober- bzw. Unterlösungen $u \in W^{1,2}(\Omega)$ sind dann definiert durch

$$\int_\Omega (\nabla v \cdot A(\cdot, u, \nabla u) - vB(\cdot, u, \nabla u))\, d\mu \geq (\leq) 0 \quad \text{für alle } v \in W^{1,1}_0(\Omega) \text{ mit } v \geq 0. \tag{5.13}$$

Zuerst zeigen wir in der folgenden Proposition die lokale Beschränktheit und eine schwache Harnackungleichung von Lösungen von (5.13). Aus der schwachen Harnackungleichung werden wir die volle Harnackungleichung und die Höderstetigkeit der Lösungen herleiten. Das ist das letzte fehlende Glied für die Lösung des Plateauproblems.

Proposition 5.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10).

(i) Für jede Unterlösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von (5.13) *auf $\Omega \supset B(y, 2R)$ und $p > 1$ gilt*

$$\sup_{B(y,R)} u \leq C(n, \Lambda, R, p, q) \left(R^{-\frac{n}{p}} \|u_+\|_{L^p(B(y,2R))} + k(R) \right).$$

(ii) Schwache Harnackungleichung. *Für jede Oberlösung* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *von* (5.13) *auf* Ω, *die auf* $B(y,4R) \subset \Omega$ *nichtnegativ ist, und* $1 \le p \le \frac{n}{n-2}$ *gilt*

$$R^{-\frac{n}{p}}\|u\|_{L^p(B(y,2R))} \le C(n,\Lambda,R,p,q)\left(\inf_{B(y,R)} u + k(R)\right)$$

Für Oberlösungen u ist $-u$ eine Unterlösung, für die dann (i) gilt.

Beweis: Im folgenden bezeichne $B_R := B(y,R)$. Der Beweis von beiden Teilen (i) und (ii) benutzt die Iteration von Jürgen Moser, die wir zuerst darstellen. Die jeweiligen Aussagen erhält man dann durch verschiedenen Wahlen von Testfunktionen. Im Beweis von (ii) schließen wir mit dem Lemma von John und Nirenberg eine entscheidende Lücke des Iterationsschemas. Die Testfunktionen werden aus geeigneten Potenzfunktionen konstruiert, deren Exponenten unbeschränkt sind. Zuerst sei $R = 1$, also im Beweis von (i) $B_2 \subset \Omega$ und im Beweis von (ii) $B_4 \subset \Omega$. Für andere $R > 0$ benutzen wir die Transformation $x \to \frac{x}{R}$. Für $\eta \in C_0^1(B_4)$ mit $\eta \ge 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $S > 0$ und $k > k(R)$ ist

$$v = \eta^2\bar{u}^\beta, \quad \text{mit} \quad u_S = S + \tfrac{1}{2}(u - S - |u-S|) \quad \text{und} \quad \bar{u} = \tfrac{1}{2}(u_S + |u_S|) + k$$

wegen Proposition 3.30 eine in (5.13) zugelassene Testfunktion mit der Ableitung

$$\nabla v = 2\eta\nabla\eta\bar{u}^\beta + \beta\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\chi_{[u\in(0,S)]}\nabla u.$$

Für Unter- bzw. Oberlösungen ist also folgendes Integral nichtpositiv bzw. nichtnegativ:

$$\beta\int_{\Omega\cap[u\in(0,S)]}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\nabla u\cdot A(\cdot,u,\nabla u)\,d\mu + 2\int_\Omega \eta\nabla\eta\cdot A(\cdot,u,\nabla u)\bar{u}^\beta\,d\mu - \int_\Omega \eta^2\bar{u}^\beta B(\cdot,u,\nabla u)\,d\mu. \tag{5.14}$$

Aus (5.12) erhalten für alle $0 < \varepsilon \le 1$ und $k > k(R)$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\nabla u\cdot A(\cdot,u,\nabla u) &\ge \tfrac{1}{2}\left(\Lambda^{-1}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|\nabla u|^2 - \Lambda\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1}\right)\\
2|\eta\nabla\eta\cdot A(\cdot,u,\nabla u)\bar{u}^\beta| &\le 2\bar{a}\eta|\nabla\eta|\bar{u}^\beta|\nabla u| + 2\bar{b}^{1/2}\eta|\nabla\eta|\bar{u}^{\beta+1}\\
&\le \varepsilon\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|\nabla u|^2 + \left(1+\tfrac{\bar{a}^2}{\varepsilon}\right)|\nabla\eta|^2\bar{u}^{\beta+1} + \bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1}\\
|\eta^2\bar{u}^\beta B(\cdot,u,\nabla u)| &\le \tfrac{\varepsilon}{8}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|\nabla u|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Im Folgenden sei β für Unterlösungen u positiv und für Oberlösungen negativ, und $\varepsilon = \min\{1, \frac{1}{3\Lambda}\}$. Weil (5.14) nichtnegativ bzw. nichtpositiv ist, folgt aus (5.15)

$$\int_{\Omega\cap[u\in(0,S)]}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}|\nabla u|^2\,d\mu \le 8\Lambda(1+\Lambda)(1+|\beta|^{-1})\int_\Omega(\bar{b}\eta^2 + (1+|a|^2)|\nabla\eta|^2)\bar{u}^{\beta+1}\,d\mu, \tag{5.16}$$

wobei $1+|\beta|^{-1}$ beschränkt ist, wenn $|\beta|$ eine positive untere Schranke besitzt. Sei w

$$w = \begin{cases}\bar{u}^{\frac{\beta+1}{2}} & \text{für } \beta \ne -1\\ \log\bar{u} & \text{für } \beta = -1.\end{cases}$$

Weil ∇w auf $\Omega \setminus [u \in (0,S)]$ verschwindet, schreiben wir (5.16) mit $\gamma = \beta + 1$ um zu

$$\int_\Omega |\eta \nabla w|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \begin{cases} C(|\beta|,\Lambda))\gamma^2 \int_\Omega (\bar{b}\eta^2 + (1+|a|^2)|\nabla\eta|^2) w^2 \,\mathrm{d}\mu & \text{für } \beta \neq -1 \\ C(\Lambda) \int_\Omega (\bar{b}\eta^2 + (1+|a|^2)|\nabla\eta|^2)\,\mathrm{d}\mu & \text{für } \beta = -1. \end{cases} \tag{5.17}$$

Die Sobolevungleichung ermöglicht es die obere Ungleichung zu iterrieren. Sei also $\hat{n} = n$ für $n > 2$, $2 < \hat{2} < q$ für $n = 2$. Dann folgt aus der Sobolevungleichung 3.45

$$\|\eta w\|^2_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} \leq C(\hat{n}) \int_\Omega (|\eta \nabla w|^2 + |w \nabla \eta|^2)\,\mathrm{d}\mu \tag{5.18}$$

Wegen $2 < \hat{n} < q$ gilt $\frac{\hat{n}-2}{2\hat{n}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\hat{n}} < \frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{2q}{q-2} < \frac{1}{2}$ und $\frac{q-2}{2q} = \lambda \frac{\hat{n}-2}{2\hat{n}} + (1-\lambda)\frac{1}{2}$ mit $\lambda = \frac{\hat{n}}{q}$. Aus den Hölder- und Youngschen Ungleichungen $ab \leq \lambda a^{\frac{1}{\lambda}} + (1-\lambda) b^{\frac{1}{1-\lambda}}$ folgt

$$\int_\Omega \bar{b}(\eta w)^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \|\bar{b}\|_{\frac{q}{2}} \|\eta w\|^2_{\frac{2q}{q-2}} \leq \|\bar{b}\|_{\frac{q}{2}} \left(\left(\varepsilon \|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}}\right)^\lambda \left(\varepsilon^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}} \|\eta w\|_2\right)^{1-\lambda} \right)^2 \leq$$
$$\leq \|\bar{b}\|_{\frac{q}{2}} \left(\lambda\varepsilon \|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} + (1-\lambda)\varepsilon^{-\frac{\lambda}{1-\lambda}} \|\eta w\|_2 \right)^2 = \|\bar{b}\|_{\frac{q}{2}} \left(\varepsilon \frac{\hat{n}}{q} \|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} + \varepsilon^{-\frac{\hat{n}}{q-\hat{n}}} \frac{q-\hat{n}}{q} \|\eta w\|_2 \right)^2.$$

Wegen (4.3) und der Wahl von k_R (5.11) gilt $\|\bar{b}\|_{\frac{q}{2}} \leq C(\Lambda,\Omega)$ auf allen Bällen, auf denen wir die Iteration benutzen. Obige Ungleichung setzen wir zusammen mit (5.17) in (5.18) ein und absorbieren $\|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}}$ für hinreichend kleines $\varepsilon|\gamma|C(\hat{n},\Lambda,q,|\beta|) = 1$:

$$\|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{\hat{n}-2}} \leq C(\hat{n},\Lambda,q,|\beta|)(1+|\gamma|)^{\frac{q}{q-\hat{n}}} \|(\eta + |\nabla\eta|)w\|_2. \tag{5.19}$$

Dabei ist die Konstante $C(\hat{n},\Lambda,q,|\beta|)$ in (5.19) wieder beschränkt, solange $|\beta|$ eine positive untere Schranke hat. Als nächtes spezifizieren wir die Abschneidefunktion η genauer. Wir wählen $1 \leq r_1 < r_2 \leq 2$ bzw. 4 und setzen $\eta \equiv 1$ auf B_{r_1}, und $\eta \equiv 0$ auf $\Omega \setminus B_{r_2}$ mit $\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B_4)} \leq \frac{2}{r_2 - r_1}$. Mit $\chi = \frac{\hat{n}}{\hat{n}-2}$ erhalten wir aus (5.19)

$$\|w\|_{L^{2\chi}(B_{r_1})} \leq \frac{C(1+|\gamma|)^{\frac{q}{q-\hat{n}}}}{r_2 - r_1} \|w\|_{L^2(B_{r_2})} \tag{5.20}$$

Aus der Ungleichung (5.20) erhalten wir in den beiden Fällen $\gamma > 0$ bzw. $\gamma < 0$

$$\Phi(\chi\gamma, r_1) \leq \left(\frac{C(1+|\gamma|)^{\frac{q}{q-\hat{n}}}}{r_2 - r_1} \right)^{\frac{2}{|\gamma|}} \Phi(\gamma, r_2) \text{ bzw. } \Phi(\gamma, r_2) \leq \left(\frac{C(1+|\gamma|)^{\frac{q}{q-\hat{n}}}}{r_2 - r_1} \right)^{\frac{2}{|\gamma|}} \Phi(\chi\gamma, r_1) \tag{5.21}$$
$$\text{mit } \Phi(\gamma, r) = \left(\int_{B_r} |\bar{u}|^\gamma \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \|w\|^{\frac{2}{\gamma}}_{L^2(B_r)}, \quad \Phi(\chi\gamma, r) = \left(\int_{B_r} |\bar{u}|^{\chi\gamma} \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{\chi\gamma}} = \|w\|^{\frac{2}{\gamma}}_{L^{2\chi}(B_r)}$$

für $r \leq 2$ bzw. 4 und $\gamma \neq 0$. Wir iterieren diese Ungleichungen. Im Fall (i) mit $\beta > 0$ und $\gamma > 1$ sei $\gamma_m = \chi^m p$ mit $p > 1$ und $r_m = 1 + 2^{-m} \leq 2$ für $m \in \mathbb{N}_0$. Induktiv folgt

$$\begin{aligned}\Phi(\chi^m p, 1) &\leq \prod_{l=1}^{m} \left(\frac{C(2\chi^l p)^{\frac{q}{q-\hat{n}}}}{2^{-l}} \right)^{\frac{2}{\chi^l p}} \Phi(p,2) \leq \left(C(2p)^{\frac{q}{q-\hat{n}}} \right)^{\frac{2}{p}\sum_{l=1}^{m}\chi^{-l}} \left(2\chi^{\frac{q}{q-\hat{n}}} \right)^{\frac{2}{p}\sum_{l=1}^{m} l\chi^{-l}} \Phi(p,2) \\ &\leq C(n,\Lambda,p,q)\Phi(p,2) =: \tilde{S} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}, \quad \text{also} \\ \|\bar{u}\|_{L^\infty(B_1)} &\leq C(n,\Lambda,p,q)\|\bar{u}\|_{L^p(B_2)} \text{ wegen } \int_{B_1} \left(\frac{|\bar{u}|}{\tilde{S}} \right)^{\chi^m p} \mathrm{d}\mu \leq 1 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Falls $\|u_+\|_{L^p(B_4)} < \infty$ folgt $\|\bar{u}\|_{L^p(B_4)} \leq \|u_+\|_{L^p(B_4)} + k$ für alle $S > 0$, und damit (i) für $R = 1$ im Grenzwert $S \to \infty$ und $k \downarrow k(R)$. Unter der Transformation $x \mapsto \tilde{x} = \frac{\chi}{R}$ erhalten alle Ableitungen einen Faktor R^{-1}. Wenn wir (5.9) mit R^2 multiplizieren, dann transformieren sich die Koeffizienten wie $(a, b, c, d, f, g) \to (a, Rb, Rc, R^2 d, Rf, R^2 g)$. Wegen $|Rf|^q \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}\tilde{x} = |R^\delta f|^q \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x$ und $|R^2 g|^{\frac{q}{2}} \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}\tilde{x} = |R^{2\delta} g| \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}x$ transformieren sich die restlichen Größen in (5.12) wie $(\bar{a}, \bar{b}, k) \to (\bar{a}, R^2\bar{b}, k)$, woraus (i) folgt.

Im Beweis von (ii) sei $\bar{u} = u + k$ mit $k > k(R)$ und $\beta < 0$. Für $0 < p_0 < p < \chi$ folgt aus (5.21) einmal ohne Iteration und einmal mit analoger Iteration mit $r_m = 1 + 2^{-m}$

$$\Phi(p,2) \leq C_1\Phi(p_0,3), \quad \Phi(-\chi^m p_0, 1) \geq C_2^{-1}\Phi(-p_0,3) =: I \text{ für alle } m \in \mathbb{N},$$
$$\text{also } \inf_{B_1} u \geq I \text{ wegen } \int_{B_1} \left(\frac{I}{\bar{u}} \right)^{\chi^m p_0} \mathrm{d}\mu \geq 1 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Also folgt (ii) für $R = 1$ und $C(n, \Lambda, R, p, q) = (C_1 C_2 C_3)^{-1}$ im Grenzwert $k \downarrow k(R)$ aus

$$\Phi(p_0, 3) \leq C_3 \Phi(-p_0, 3). \tag{5.22}$$

Um das zu zeigen, benutzen wir die untere Ungleichung von (5.17). Sei B_{2r} ein beliebiger Ball vom Radius $2r$ in B_4 und η eine Abschneidefunktion mit $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{r}$, die auf B_r gleich $\eta \equiv 1$ ist und auf $\Omega \setminus B_4$ verschwindet. Mit der Hölderungleichung folgt aus (5.17)

$$\int_{B_r} |\nabla w| \,\mathrm{d}\mu \leq \omega_n^{\frac{1}{2}} r^{\frac{n}{2}} \left(\int_{B_r} |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(n,\Lambda) r^{n-1} \text{ wegen } r \leq 2 \text{ und } n \geq 2.$$

Wegen dem John-Nirenberg Lemma 3.51 existiert ein $p_0 = p_0(n, \Lambda) > 0$ mit

$$\int_{B_3} e^{p_0|w-w_0|} \,\mathrm{d}\mu \leq C(n,\Lambda) \quad \text{mit} \quad w_0 = \frac{1}{\mu(B_3)} \int_{B_3} w \,\mathrm{d}\mu, \quad \text{also}$$
$$\left(\int_{B_3} e^{p_0 w} \,\mathrm{d}\mu \right) \left(\int_{B_3} e^{-p_0 w} \,\mathrm{d}\mu \right) \leq C^2(n,\Lambda) e^{p_0 w_0} e^{-p_0 w_0} \leq C(n,\Lambda).$$

Aufgrund der Definition von w zeigt das (5.22) und damit (ii) für $k \downarrow k(R)$ und $R = 1$. Wie im Beweis von (i) folgt (ii) für andere $R > 0$ aus der Transformation $x \to \frac{x}{R}$.**q.e.d.**

Wir zeigen jetzt mithilfe der Proposition 5.3 für homogene (d.h. $f = 0 = g$) Unterlösungen das starke Maximumprinzip, für homogene positive Lösungen eine Harnackungleichung und für inhomogene Lösungen die Hölderstetigkeit.

Starkes Maximumprinzip 5.4*: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und es gelte* (4.2)-(4.3) *und* (4.6) *für L* (4.1)*. Jede homogene Unterlösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von* (5.9) *ist konstant und für $u \neq 0$ gilt in* (4.6) *Gleichheit, wenn folgendes gilt:*

$$\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0 \qquad \text{für einen Ball } B \Subset \Omega. \tag{5.23}$$

Beweis*: Die Bedingung (4.6) ist äquivalent dazu, dass positive Konstante homogene Oberlösungen sind. Also ist $S - u$ mit $S = \sup_\Omega u \geq 0$ als Summe zweier Oberlösungen eine Oberlösung. Wegen der Schwachen Harnackungleichung Proposition 5.3 (ii) gilt

$$R^{-n}\|S - u\|_{L^1(B(y,2R))} \leq C \inf_{B(y,R)} (S - u) \quad \text{für alle} \quad B(y, 4R) \subset \Omega, \text{ also}$$

$$A := \{y \in \Omega \mid \inf_{\varepsilon>0} \sup_{B(y,\varepsilon)} u = S\} = \{y \in \Omega \mid u|_{B(y,\varepsilon)} = S \text{ für ein } B(y,\varepsilon) \subset \Omega\} =: B.$$

Für jeden Grenzwert y einer Folge y_k in A enthält $B(y,\varepsilon) \supset B(y_k, \frac{\varepsilon}{2})$ für große k. Also ist A abgeschlossen und wegen (5.23) nicht leer, und B offen, also beide gleich Ω.**q.e.d.**

Das Starke Maximumprinzip 5.4 zeigt, dass Unterlösungen von $Lu = 0$ kein inneres echtes Maximum besizten. Für stetige Lösungen entspricht das dem klassichen Starken Maximumprinzip 2.13. Für eine Oberlösung folgt das entsprechende Starke Minimumprinzip. Für stetige Lösungen von $Lu = 0$ folgt also das Schwache Maximumprinzip 4.2

Die Kombination von (i) und (ii) in Proposition 5.3 ergibt die folgende

Harnacksche Ungleichung 5.5*: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10)*. Jede nichtnegative homogene Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von* (5.9) *erfüllt*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C(n, \Lambda, R) \inf_{\Omega'} u \qquad \text{für alle offenen und zusammenhängenden } \Omega' \Subset \Omega.$$

Beweis*: Für $B(y, 4R) \subset \Omega$ und $\Omega' = B(y, R)$ folgt die Aussage aus (i) und (ii) in Proposition 5.3. Wir überdecken $\Omega' \Subset \Omega$ durch endlich viele solcher $B(y_k, R_k)$. Seien $B(y_0, R_0)$ und $B(y_K, R_K)$ die Bälle mit dem kleinsten $\inf_{B(y_k,R_k)} u$ bzw. mit dem größten $\sup_{B(y_k,R_k)} u$. Für zusammenhängende Ω' können wir $B(y_{k-1}, R_{k-1}) \cap B(y_k, R_k) \neq \emptyset$, also $\inf_{B(y_{k-1},R_{k-1})} u \leq \sup_{B(y_k,R_k)} u$ für $k = 1, \ldots, K$ annehmen. Aus der K-fachen Anwendung der Ungleichung für $\Omega' = B(y_k, R_k)$ folgt die für Ω'. **q.e.d.**

Der folgende Satz geht auf De Giorgi und Nash zurück und ist die Grundlage für die Erweiterung der elliptischen Theorie auf quasilineare Differentialgleichungen.

Satz 5.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10)*. Dann ist jede Lösung von* (5.9) *hölderstetig in Ω und es gilt für alle $B(y, R_0) \subset \Omega$ und $R \leq R_0$*

$$\operatorname*{osc}_{B(y,R)} u \leq C(n, \Lambda, q, R_0) \left(\left(\tfrac{R}{R_0}\right)^{\alpha} \sup_{B(y,R_0)} |u| + R^{\alpha} \frac{\|f\|_q + \|g\|_{\frac{q}{2}}}{\Lambda} \right) \quad \textit{für ein } \alpha = \alpha(n, \Lambda, q, R_0) > 0.$$

Beweis: Für $R \leq \frac{R_0}{4}$ und folgende Größen gilt

$$S_0 = \sup_{B(y,R_0)} |u|, \quad S_4 = \sup_{B(y,4R)} u, \quad m_4 = \inf_{B(y,4R)} u, \quad S_1 = \sup_{B(y,R)} u, \quad m_1 = \inf_{B(y,R)} u.$$
$$L(S_4 - u) = S_4(\nabla \cdot b + d) - \nabla \cdot f - g, \quad L(u - m_4) = m_4(\nabla \cdot b + d) + \nabla \cdot f + g.$$

Mit $p = 1$ ergibt die Anwendung der schwachen Harnackungleichung Proposition 5.3 (ii) auf die Funktionen $S_4 - u$ und $u - m_4$ auf $B(y, 4R)$

$$\frac{1}{R^n} \int_{B(y,2R)} (S_4 - u)\, \mathrm{d}\mu \leq C(S_4 - S_1 + \bar{k}(R)), \quad \frac{1}{R^n} \int_{B(y,2R)} (u - m_4)\, \mathrm{d}\mu \leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)).$$
$$\text{mit} \quad \bar{k}(R) = \frac{R^{1-\frac{n}{q}}}{\Lambda}(\|f\|_q + S_0\|b\|_q) + \frac{R^{2-\frac{2n}{q}}}{\Lambda}(\|g\|_{\frac{q}{2}} + S_0\|d\|_{\frac{q}{2}}).$$

Die Summe dieser beiden Ungleichungen ergibt zuerst

$$S_4 - m_4 \leq C(n, \Lambda, R_0, q)(S_4 - m_4 + m_1 - S_1 + \bar{k}(R)) \quad \text{und dann}$$
$$\omega(R) \leq (1 - C^{-1}(n, \Lambda, R_0, q))\omega(4R) + \bar{k}(R) \quad \text{mit } \omega(R) = \operatorname*{osc}_{B(y,R)} u = S_1 - m_1.$$

Der Satz folgt aus dem folgenden Lemma, wobei wir $\mu \in (0, 1)$ so groß wählen, dass $(1 - \mu)\frac{\ln \gamma}{\ln \tau} < \mu(1 - \frac{n}{q})$ mit $\gamma = 1 - C^{-1}(n, \Lambda, R_0, q)$ und $\tau = \frac{1}{4}$ gilt. **q.e.d.**

Lemma 5.7. *Für monoton wachsende $\omega, \sigma : (0, R_0] \to \mathbb{R}$ und $0 < \gamma, \tau < 1$ gelte*

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R)$$

Dann gilt für alle $\mu \in (0, 1)$ und $R \leq R_0$

$$\omega(R) \leq C(\gamma, \tau) \left(\left(\tfrac{R}{R_0}\right)^{\alpha} \omega(R_0) + \sigma(R^{\mu} R_0^{1-\mu}) \right) \qquad \textit{für ein } \alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu) > 0.$$

Beweis*: Sei zuerst $R_1 \leq R_0$. Weil σ monoton wächst gilt dann für alle $R \leq R_1$

$$\omega(\tau R) \leq \gamma\omega(R) + \sigma(R_1)$$

Die m-fache Iteration diese Ungleichung ergibt

$$\omega(\tau^m R_1) \le \gamma^m \omega(R_1) + \sigma(R_1) \sum_{i=0}^{m-1} \gamma^i \le \gamma^m \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}.$$

Für jedes $R \le R_1$ sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\tau^m R_1 < R \le \tau^{m-1} R_1$, also $\frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \tau} - 1 \le m < \frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \tau}$

$$\omega(R) \le \omega(\tau^{m-1} R_1) \le \gamma^{m-1} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma} \le \tfrac{1}{\gamma} \left(\tfrac{R}{R_1}\right)^{\frac{\ln \gamma}{\ln \tau}} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_1)}{1-\gamma}.$$

Für $R_1 = R_0^{1-\mu} R^\mu$ folgt also

$$\omega(R) \le \tfrac{1}{\gamma} \left(\tfrac{R}{R_0}\right)^{(1-\mu)\frac{\ln \gamma}{\ln \tau}} \omega(R_0) + \frac{\sigma(R_0^{1-\mu} R^\mu)}{1-\gamma}.$$ **q.e.d.**

Die Kombination von Proposition 5.3 und Satz 5.6 ergibt die folgende Höderstetigkeit:

Satz 5.8.* *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10). *Dann gilt für jede Lösung von* (5.9) *auf $\Omega' \Subset \Omega$ mit $d' = d(\Omega', \partial\Omega)$ und $\alpha = \alpha(n, \Lambda, d') > 0$*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \le C(n, \Lambda, q, d') \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\|f\|_q + \|g\|_{\frac{q}{2}}}{\Lambda} \right).$$

Beweis*: Die Aussage folgt aus Satz 5.6 mit $R_0 = d'$ und Propsition 5.3 (i). **q.e.d.**

Wir verallgemeinern die Definition 3.36 von Ungleichungen von $W^{1,2}(\Omega)$-Funktionen. Sei T eine beliebige Teilmenge von $\bar{\Omega}$ und $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt $u \le 0$ auf T, wenn $u_+ = \frac{1}{2}(u + |u|)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ zum Abschluss von $C_0^1(\bar{\Omega} \setminus T)$ gehört. Für stetige u ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn $u \le 0$ auf T gilt. Für $T = \partial\Omega$ stimmt diese Definition mit Definitions 3.36 überein. Jetzt verallgemeinern wir Proposition 5.3.

Proposition 5.9.* *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10).

(i) Für jede Unterlösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von (5.13), *alle $B(y, R) \subset \mathbb{R}^n$ und $p > 1$ gilt*

$$\sup_{\Omega \cap B(y,R)} u_M \le C(n, \Lambda, R, p, q) \left(R^{-\frac{n}{p}} \|u_M\|_{L^p(\Omega \cap B(y,2R))} + k(R) \right)$$
$$\text{mit } M = \sup_{\partial\Omega \cap B(y,2R)} u_+ \quad \text{und } u_M = M + \tfrac{1}{2}(u - M + |u - M|).$$

(ii) Schwache Harnackungleichung. *Für jede Oberlösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von* (5.13), *die für einen $B(y, 4R) \subset \mathbb{R}^n$ auf $\Omega \cap B(y, 4R)$ nichtnegativ ist, und $1 \le p \le \frac{n}{n-2}$ gilt*

$$R^{-\frac{n}{p}} \|u_m\|_{L^p(\Omega \cap B(y,2R))} \le C(n, \Lambda, R, p, q) \left(\inf_{\Omega \cap B(y,R)} u_m + k(R) \right)$$
$$\text{mit } m = \inf_{\partial\Omega \cap B(y,4R)} u \quad \text{und } u_m = m + \tfrac{1}{2}(u - m - |u - m|).$$

Für Oberlösungen u ist $-u$ eine Unterlösung, für die dann (i) gilt.
Beweis*: Wir modifizieren den Beweis von Proposition 5.3. Im Beweis von (i) bzw. (ii) sei für $M < S$ bzw. $S < m$ und in beiden Fällen für $k > k(R)$

$$u_S = S + \tfrac{1}{2}(u_M - S - |u_M - S|) \qquad \text{bzw.} \qquad u_S = S + \tfrac{1}{2}(u_m - S - |u_m - S|)$$
$$v = \eta^2 \begin{cases} \bar{u}^\beta - (M+k)^\beta & \text{für } \beta > 0, \\ \bar{u}^\beta - (m+k)^\beta & \text{für } \beta < 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \bar{u} = \frac{1}{2}(u_S + |u_S|) + k.$$

Dabei ist $\eta \in C^1_0(B(y, 4R))$ wieder eine später im Beweis genauer spezifizierte Testfunktion. Weil die Strukturungleichungen (5.12) im Träger von v für $\bar{z} = \bar{u}$ und $p = \nabla u$ gelten, und wegen $v = \eta^2 \bar{u}^\beta$, folgt wieder die Ungleichung 5.16 für $\bar{u}$. Der Rest der Beweise von (i) und (ii) verläuft wie im Beweis von Proposition 5.3. **q.e.d.**

Die globale Stetigkeit folgt nur dann aus Proposition 5.9 (ii), wenn Ω zusätzliche Bedingungen erfüllt. Wir sagen, dass Ω bei $x_0 \in \partial\Omega$ eine äußere Kegelbedingung erfüllt, wenn ein Kreiskegel V_{x_0} mit Scheitelpunkt x_0 ganz außerhalb von Ω liegt. Das ist z.B. dann erfüllt, wenn es einen offenen Ball außerhalb von Ω gibt, dessen Abschluss x_0 enthält. Unter diesen Bedingungen gilt folgende verschärfte Hölderstetigkeit.

Satz 5.10*. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und es gelte* (4.2)-(4.3) *für L* (4.1) *und* (5.10). *Wenn Ω an allen Punkten von $\partial\Omega$ eine äußere Kegelbedingung erfüllt, dann gilt für jede Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von* (5.9), *alle $x_0 \in \partial\Omega$, $0 < R \leq R_0$ und ein $\alpha = \alpha(n, \Lambda, R_0, q, V_{x_0}) > 0$*

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B(x_0,R)} u \leq C(n, \Lambda, q, R_0) \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \sup_{\Omega \cap B(x_0,R_0)} |u| + R^\alpha k(R) + \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap B(x_0, \sqrt{RR_0})} u \right).$$

Im Folgenden bezeichne $\Omega_R := \Omega \cap B(x_0, R)$ und $\partial\Omega_R := \partial\Omega \cap B(x_0, R)$ für $x_0 \in \partial\Omega$.
Beweis*: Wir modifizieren den Beweis von Satz 5.6. Sei R kleiner als $\frac{R_0}{4}$ und als die Höhe von V_{x_0} und folgende Größen

$$S_0 = \sup_{B(y,R_0)} |u|, \quad S_4 = \sup_{B(y,4R)} u, \quad m_4 = \inf_{B(y,4R)} u, \quad S_1 = \sup_{B(y,R)} u, \quad m_1 = \inf_{B(y,R)} u.$$

Die Anwendung der Schwache Harnackungleichung in Proposition 5.9 (ii) auf die Funktionen $S_4 - u$ und $u - m_4$ auf $B(x_0, 4R)$ ergibt

$$\left(S_4 - \sup_{\partial\Omega_{4R}} u \right) \frac{\mu(B_{2R}(x_0) \setminus \Omega)}{R^n} \leq R^{-n} \int_{B_{2R}(x_0)} (S_4 - u)^-_{S_4 - S} \,\mathrm{d}\mu \leq C(S_4 - S_1 + \bar{k}(R)),$$
$$\left(\inf_{\partial\Omega_{4R}} u - m_4 \right) \frac{\mu(B_{2R}(x_0) \setminus \Omega)}{R^n} \leq R^{-n} \int_{B_{2R}(x_0)} (u - m_4)^-_{m - m_4} \,\mathrm{d}\mu \leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)).$$

Mithilfe der äußeren Kegelbdingung folgt daraus

$$S_4 - S \leq C(S_4 - S_1 + \bar{k}(R)), \quad m - m_4 \leq C(m_1 - m_4 + \bar{k}(R)),$$
$$\operatorname{osc}_{\Omega_R} u \leq (1 - C^{-1}(n, \Lambda, R_0, q, V_{x_0})) \operatorname{osc}_{\Omega_{4R}} u + \bar{k}(R) + \operatorname{osc}_{\partial\Omega_{4R}} u.$$

Dann folgt die Aussage wieder aus Lemma 5.7. **q.e.d.**

Wenn die Voraussetzungen vom Satz 5.10 und $\lim_{R\downarrow 0} \operatorname{osc}_{B(x_0,R)} u = 0$ gelten, dann folgt $u(x_0) = \lim_{x\to x_0} u(x)$ aus diesem Satz. Aus den Sätzen 5.6 und 5.10 folgt dann

Korollar 5.11*. *Wenn das Gebiet Ω zusätzlich zu den Voraussetzungen vom Satz 5.10 beschränkt ist und auf ganz $\partial\Omega$ eine äußere Kegelbedingung erfüllt, und $\operatorname{osc}_{\partial\Omega\cap B_{R(x_0)}} u \to 0$ im Grenzwert $R \downarrow 0$ für alle $x_0 \in \partial\Omega$ gilt, dann ist u auf Ω gleichmäßig stetig.* **q.e.d.**

Insbsondere liegen unter den Voraussetzungen des Korollars die eindeutigen Lösungen des Dirichletproblems aus Satz 4.3 für Randwerte $\varphi \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ in $C^0(\bar{\Omega})$. Aus den entsprechenden Abschätzungen folgt dann für jeden Randwert $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, dass die entsprechende Lösung des Dirichletproblems in $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ liegt.

Aus Satz 5.10 folgt auch eine globale Hölderstetigkeit, wenn Ω eine etwas stärkere Bedingung erfüllt. Wir sagen, dass Ω auf $T \subset \partial\Omega$ eine gleichmäßige außere Kegelbdingung erfüllt, wenn Ω für alle $x_0 \in T$ ausßerhalb eines zu einem gegebenen Kreiskegel kongruenten Kegels V_{x_0} mit Scheitelpunkt x_0 liegt. Damit verschärfen wir auch Satz 5.8.

Satz 5.12. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen und erfülle auf einer Teilmenge $T \subset \partial\Omega$ bzw. $T = \partial\Omega$ eine gleichmäßige äußere Kegelbedingung, und es gelte (4.2)-(4.3) für L (4.1) und (5.10). Für jede Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von (5.9), die folgendes erfüllt*

$$\operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap B(x_0,R)} u \leq KR^\alpha \qquad \text{für feste } K > 0, \alpha_0 > 0 \qquad \text{und alle } x_0 \in T, R > 0,$$

folgt $u \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ für $\Omega' \Subset \Omega \cup T$ mit $d' = d(\Omega', \partial\Omega \setminus T)$ bzw. $d' = \operatorname{diam} \Omega$ für $\Omega' = \Omega$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega')} \leq C(n, \Lambda, V_{x_0}, q, \alpha_0, d') \left(\sup_{\Omega} |u| + K + k \right) \text{für ein } \alpha = \alpha(n, \Lambda, V_{x_0}, q, \alpha_0, d') > 0.$$

Beweis*: Sei $y \in \Omega'$ und $\delta = d(y, \partial\Omega) < d'$. Wegen Satz 5.6 gilt mit $r_0 = \delta$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C \left(\delta^\alpha \sup_{B(y,\delta)} |u| + k \right)$$

bei allen $x \in B(y, \delta)$. Für ein $x_0 \in \partial\Omega$ mit $d(x_0, y) = \delta$ folgt mit $R = 2\delta$ und $R_0 = 2d'$

$$\delta^{-\alpha} \operatorname{osc}_{B(y,\delta)} u \leq \delta^{-\alpha} \operatorname{osc}_{\Omega_{2\delta}} u \leq C \left(\sup_{\Omega} |u| + k + K \right)$$

für $2\alpha \leq \alpha_0$ aus Satz 5.10. Wegen $u(x_0) = 0$ folgt für alle $x \in B(y, \delta)$

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C \left(\sup_\Omega |u| + k + K \right).$$

Aus einer nochmaligen Anwendung von Satz 5.10 mit $R = 2d(x, y)$ und $R_0 = 2d'$ folgt diese Ungleichung auch für $d' \geq d(x, y) \geq \delta'$. **q.e.d.**

Dieser Satz kombiniert getrennte Hölderabschätzungen im Inneren und auf dem Rand zu teilweise globalen bzw. globalen Hölderabschätzungen. Wir bemerken, dass $\operatorname{osc}_{\partial\Omega \cap B(y,R)} u \to 0$ für alle $y \in \partial\Omega$ im Grenzwert $R \downarrow$ für $u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ aus $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$ folgt. Für $\varphi \in C^{0,\alpha_0}(\Omega)$ folgt sogar $\operatorname{osc}_{\partial\Omega} u \leq K R^{\alpha_0}$.

5.3 Plateauproblem

In diesem Abschnitt zeigen wir die eindeutige Lösbarkeit des Plateauproblems für Gebiete Ω mit $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ und Randwerte φ mit beschränkter Steigung. Zuerst wollen wir das Maximumprinzip Korollar 2.14 benutzen um die Eindeutigkeit zu zeigen.

Satz 5.13 (Vergleichsprinzip)**.** *Auf der offenen Menge $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ seien $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n)$ und $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \nabla u(x)) \partial_i \partial_j u(x) \geq \sum\nolimits_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \nabla v(x)) \partial_i \partial_j v(x) \quad \textit{auf } x \in \Omega,$$

$u \leq v$ auf $\partial\Omega$ und $a(\cdot, \nabla u(\cdot))$ oder $a(\cdot, \nabla v(\cdot)$ erfüllt (4.2). Dann gilt $u \leq v$ auch auf Ω.

Beweis: Die Funktion $w = u - v$ löst dann die Ungleichung

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \partial_i \partial_j w + \sum\nolimits_{k=1}^n B_k(x) \partial_k w(x) \geq 0 \quad \text{mit} \quad A_{ij}(x) = a_{ij}(x, \nabla u(x)),$$

$$B_k(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}(x, \nabla u(x)) - a_{ij}(x, \nabla v(x)) - \sum_{l=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x, \nabla u(x))}{\partial p_l} \partial_l w(x)}{|\nabla u(x) - \nabla v(x)|} \frac{\partial_k w(x)}{|\nabla w(x)|} \partial_i \partial_j v(x)$$
$$+ \sum_{i,j}^n \frac{\partial a_{ij}(x, \nabla u(x))}{\partial p_k} \partial_i \partial_j v(x).$$

Wegen der Differenzierbarkeit von a_{ij} konvergiert der erste Summand von $B_k(x)$ bei den $x \in \bar{\Omega}$ mit $\nabla u(x) = \nabla v(x)$ gegen Null, so dass B insgesamt auf $\bar{\Omega}$ stetig und beschränkt ist. Also erfüllt w die Voraussetzungen von dem schwachen Maximumprinzip 2.13. Das zeigt die Aussage, wenn $a(\cdot, \nabla u(\cdot))$ (4.2) erfüllt. Wenn $a(\cdot, \nabla v(\cdot))$ (4.2) erfüllt, dann vertauschen wir die Rollen von u und v definieren aber w auch als $w = u - v$. **q.e.d.**

Je zwei Lösungen u und v des Plateauproblems, deren erste Ableitungen auf Ω beschränkt sind, erfüllen alle diese Voraussetzungen, so dass $u = v$, also die Eindeutigkeit der Lösung folgt. Dieser Satz läßt sich auf allgemeinere nichtlineare elliptische Randwertprobleme übertragen. Zum Abschluss zeigen wir noch den folgenden Satz, aus dem auch die Existenz einer Lösung des Plateauproblems folgt:

Satz 5.14. *Seien $0<\alpha<1$, $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$ offen, $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$ und $\varphi\in C^{2,\alpha}(\Omega)$, so dass Ω und φ beschränkte Steigung haben. Wenn für $A\in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und $a = A'$ und alle $\lambda > 0$*

$$\begin{aligned} &a_{ij} \in C^{0,\alpha}(B(0,\lambda)) \text{ mit } \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\lambda))} \leq \Lambda(\lambda) \text{ und} \\ &\sum\nolimits_{ij=1}^{n} a_{ij}(p)\xi_i\xi_j \geq \tfrac{|\xi|^2}{\Lambda(\lambda)} \text{ für } (p,\xi) \in B(0,\lambda) \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.24}$$

auf $B(0,\lambda) \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dann gibt es ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $\nabla \cdot A(\nabla u) = 0$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$.

Beweis: Wir wenden Satz 5.1 an und zeigen (5.6) mit den 4 Schritten im Abschnitt 5.1. Die ersten drei Schritte sind am Ende von Abschnitt 5.1 ausgeführt. Insbesondere sind die Gradienten $|\nabla u|$ aller Lösungen des Dirichletproblems zu (5.4) mit Randwert $\sigma\varphi$ auf Ω uniform beschränkt. Die Komponenten von ∇u sind schwache Lösungen einer linearen elliptischen Differentialgleichung der Form (5.9), wobei das entsprechende Λ in (4.2)-(4.3) uniform beschränkt ist. Wegen Satz 5.8 liegt u dann für ein $\beta > 0$ in $C^{0,\beta}_{\text{loc}}(\Omega)$. Für die gloable Abschätzung überdecken wir wie im Beweis der Globalen Schauder Abschätzungen 4.19 $\partial\Omega$ durch Mengen $V(x_0) \subset U(x_0)$, die durch lokale $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismen Ψ auf $B(0,1) \subset B(0,2)$ abgebildet werden, so das $V(x_0) \cap \Omega \subset U(x_0) \cap \Omega$ diffeomorph zu $B(0,1)_+ \subset B(0,2)_+$ sind. Sei $\tilde{x} = \Psi(x)$ und $\tilde{\partial}_i$ bzw. $\tilde{\nabla}$ und $\tilde{D}^2$ die entsprechenden ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Dann folgt für $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(\Psi^{-1}(\tilde{x}))$ aus $\nabla \cdot A(\nabla u) = 0$ auf $B(0,2)+$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot A(\nabla(\tilde{u} \circ \Psi(x))) = \operatorname{Spur}\left(a\left(\Psi'^T(x)\tilde{\nabla}\tilde{u}(\Psi(x))\right) D^2\left(\tilde{u}(\Psi(x))\right)\right) = \\ &= \operatorname{Spur}\left(a\left(\Psi'^T(x)\tilde{\nabla}\tilde{u}(\Psi(x))\right)\left(\Psi'^T(x)\tilde{D}^2\tilde{u}(\Psi(x))\Psi'(x) + \sum\nolimits_{i=1}^{n} D^2\Psi_i(x)\tilde{\partial}_i\tilde{u}(\Psi(x))\right)\right). \end{aligned}$$

Dann erfüllt $\tilde{u}$ auf $B(0,2)_+$ die ellitpische Differentialgleichung der Form (5.7)

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{\nabla}\tilde{u}(\tilde{x})) + \tilde{B}(\tilde{x}, \tilde{\nabla}\tilde{u}(\tilde{x})) = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{A}(\tilde{x},\tilde{p}) = \Psi'(\Psi^{-1}(\tilde{x}))A\left(\Psi'^T(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\tilde{p}\right), \\ \tilde{B}(\tilde{x},\tilde{p}) = \operatorname{Spur}\left(a\left(\Psi'^T(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\tilde{p}\right)\sum\nolimits_{i=1}^{n} D^2\Psi_i(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\tilde{p}_i\right) - \tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}(\tilde{x},\tilde{p}). \end{aligned}$$

Wegen (5.8) sind für $l = 1, \ldots, n-1$ die Komponenten $\tilde{w} = \tilde{\partial}_l\tilde{u}$ auf $B(0,2)_+$ wieder schwache Lösungen eine linear elliptischen Differentiagleichung in Divergenzform mit uniform beschränktem Λ und Inhomogenität $f_l \in (C(\bar{\Omega}))^n$. Wegen Satz 5.12 haben diese $\tilde{w}$ für ein $\alpha > 0$ auf $B(0,1)_+$ eine beschränkte Hölderkonstante $\text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha}\,\tilde{w}$. Um das auch für $\tilde{w} = \tilde{\partial}_n \tilde{u}$ zu zeigen, wählen wir für alle $y \in \overline{B(0,1)_+}$ und $0 < R \leq \frac{1}{2}$ auf $B(y,R)_+ \subset B(0,2)_+$ ein $\eta \in C_0^\infty(B(y,2R))$ mit $\eta = 1$ auf $B(y,R)$ und $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{R}$. Mit $v = \eta^2(\tilde{w} - \tilde{w}(y))$ erhalten wir wie in der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7

$$\int_{B(y,R)_+} \eta^2 |\tilde{\nabla}\tilde{w}|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C \int_{B(y,2R)_+} (\eta^2 + |\tilde{\nabla}\eta|^2 (\tilde{w} - \tilde{w}(y))^2 \,\mathrm{d}\mu \leq C(R^n + R^{n-2+2\alpha}) \leq CR^{n-2+2\alpha}$$

für ein $C > 0$ zunächst nur für $l = 1, \ldots, n-1$. Also folgt zunächst

$$\|\tilde{\partial}_i \tilde{\partial}_j \tilde{u}\|^2_{L^2(B(y,R)_+)} \leq CR^{n-2+2\alpha}$$

für alle $(i,j) \neq (n,n)$. Weil $\tilde{u}$ eine ellitische Gleichung löst, gilt das auch für $(i,j) = (n,n)$. Dann folgt aus (3.10) und aus Satz 3.50, dass auch $\text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha}\,\tilde{\nabla}\tilde{u}$ uniform beschränkt ist. Das zeigt den vierten Schritt. Damit folgt der Satz aus Satz 5.1.**q.e.d.**

Mit der elliptischen Theorie haben Jenkins und Serrin 1968 folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.15. *Sei $0 < \alpha < 1$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ mit nicht negativer mittlerer Krümmung (gilt z.B. wenn Ω konvex ist) und $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ der Minimalfächengleichung auf Ω mit $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$.*

Im Abschnitt 14.4 von D. Gibarg, N.S. Trudinger: "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order" wird das gezeigt. Die Eindeutigkeit folgt aus einer Verallgemeinerung des Maximumprinzips auf quasilineare elliptische Differentiagleichungen.