Kapitel 4

Lineare elliptische Theorie

4.1 Schwache Lösungen

Auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $W_0^{1,2}(\Omega)^* \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ den Dualraum aller Distributionen, die sich stetig auf $W_0^{1,2}(\Omega) \supset C_0^\infty(\Omega)$ fortsetzen lassen. Dazu gehören alle Distributionen der Form $g + \nabla \cdot f$ mit $g \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)^n$:

$$\langle g + \nabla \cdot f, v\rangle := \int_\Omega (gv - f \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}\mu \text{ für } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Definition 4.1. *Ein elliptischer Differentialoperator in Divergenzform auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist*

$$Lu := \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \partial_i(b_i u) + c_i \partial_i u\right) + du \qquad \textit{mit} \tag{4.1}$$

$$\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \qquad \textit{fast überall auf } x \in \Omega \textit{ und für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \quad \|d\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.3}$$

für ein $1 < \Lambda < \infty$. Für $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ heißt $u \in W^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von $Lu \leq f$ bzw. $Lu \geq f$, falls $-\mathcal{L}(u,v) \leq$ bzw. $\geq \langle f, v\rangle$ für alle $0 \leq v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt, mit

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u + b_i u\right)\partial_i v - \left(\sum_{i=1}^n c_i \partial_i u + du\right) v\right)\mathrm{d}\mu.$$

$\mathcal{L}$ ist eine stetige Bilinearform auf $W_0^{1,2}(\Omega)$, da mit (4.3) folgendes gilt:

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C(n)\Lambda \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \tag{4.4}$$

Aus (4.2)-(4.3) und $a^2 - 2ab \geq -b^2$ folgt für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die Gardingungleichung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u,u) &\geq \Lambda^{-1}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\sqrt{n}\Lambda\|u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} - \Lambda\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \\ &\geq \tfrac{1}{2\Lambda}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - (2n\Lambda^3 + \Lambda)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \tfrac{1}{4\Lambda}\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - (2n\Lambda^3 + \Lambda + \tfrac{1}{2\Lambda})\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir erweitern das schwache Maximumprinzip 2.14 auf Operatoren in Divergenzform.

Schwaches Maximumprinzip 4.2. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Divergenzform, der (4.1)-(4.3) in Ω erfüllt und es gelte*

$$\int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n b_i \partial_i v - dv\Big)\,\mathrm{d}\mu \geq 0 \qquad \textit{für alle} \qquad 0 \leq v \in W_0^{1,1}(\Omega). \tag{4.6}$$

Dann gilt für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu \geq 0$

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)\}.$$

Beweis: Für $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ und (3.19). Dann folgt

$$\int_\Omega \sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v - (c_i + b_i)\partial_i uv\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \Big(-\sum\nolimits_{i=1}^n b_i \partial_i (uv) + duv\Big)\,\mathrm{d}\mu \leq 0$$

für alle $v \geq 0$ mit $uv \geq 0$ aus $Lu \geq 0$. Aus dem Beweis von Proposition 3.35 folgt $M := \sup_{\partial\Omega} u_+ \geq 0$. Für $M \leq t$ gilt für $v_t := (u-t)_+ = (u_+ - t)_+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$v_t \geq 0, \qquad v_t u \geq 0, \qquad \nabla v_t = \begin{cases} \nabla u & \text{fast überall auf } [u > t], \\ 0 & \text{fast überall auf } [u \leq t]. \end{cases}$$

Im Spezialfall $c_i + b_i = 0$ folgt $\nabla v_M \equiv 0$ und mit Proposition 3.35 $v_M \equiv 0$:

$$0 \leq \Lambda^{-1} \int_\Omega |\nabla v_M|^2\,\mathrm{d}\mu = \Lambda^{-1}\int_{[u>M]} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v_M\,\mathrm{d}\mu \leq 0.$$

Falls die Behauptung im allgemeinen Fall nicht gilt, folgt für $M \leq t < \sup_\Omega u$ aus (4.3)

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\int_\Omega |\nabla v_t|^2\,\mathrm{d}\mu \leq& \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v_t\,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \sum\nolimits_{i=1}^n (c_i + b_i)\partial_i u v_t\,\mathrm{d}\mu \leq 2\Lambda\int_\Omega v_t|\nabla v_t|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq 2\Lambda \|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)}\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \text{ mit } \Gamma_t := [\nabla v_t \neq 0] = [\nabla u \neq 0] \cap [u > t].\end{aligned}$$

Mit der Soboleveinbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für ein $2 < q < \infty$, siehe Satz 3.46, und der Poincaréungleichung 3.43, da $v_t \in W_0^{1,2}(\Omega)$, erhalten wir für $\delta := \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > 0$

$$\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t)\|v_t\|_{L^q(\Omega)} \leq \mu^\delta(\Gamma_t)C(\Omega,n)\|v_t\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C'(\Omega,n)\mu^\delta(\Gamma_t)\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Falls $\nabla v_t \not\equiv 0$ folgt $\|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\Lambda^2\|v_t\|_{L^2(\Gamma_t)}$ aus der vorletzten Ungleichung und $C\Lambda^{-\frac{2}{\delta}} \leq \mu(\Gamma_t)$ für alle $M < t < \sup_\Omega u$ aus der letzten. Für $t \nearrow \sup_\Omega u \leq \infty$ konvergiert wegen dem Satz von Beppo Levi $|\nabla v_t|^2$ in $L^1(\Omega)$ gegen $v_{\sup_\Omega u}$. Also folgt $0 < \mu([\nabla u \neq 0] \cap [u = \sup_\Omega u])$. Wegen $u \in L^2(\Omega)$ gilt $\mu(u = \infty) = 0$, und es folgt zuerst $0 \leq M \leq \sup_\Omega u < +\infty$. Zweitens widerspricht das Proposition 3.30, gemäß der $\nabla u = 0$ fast überall auf $[u = \tau]$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen.**q.e.d.**

Also hat das Dirichletproblems unter der Bedingung (4.6) höchstens eine Lösung.

Existenz von schwachen Lösungen des Dirichletproblems 4.3. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, L ein elliptischer Operator in Divergenzform, der auf Ω (4.1)–(4.3) und (4.6) erfüllt, $f \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ und $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ mit $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Sie erfüllt die folgende Ungleichung:*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(n, L)(\|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Ist für eine Familie $\{L_m\}_{m\in M}$ solcher Operatoren $\{a_{i,j,m}, c_{i,m} \mid 1 \leq i, j \leq n, m \in M\}$ in $L^1(\Omega)$ kompakt, so existieren gleichmäßige obere Schranken $C(n, L_m) \leq C(n, \Lambda, K)$.

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 4.2. Als Distribution ist $Lu = f$ auf Ω äquivalent zu $L(u - \varphi) = \tilde{f}$, wobei $\tilde{f} \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$ für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert ist durch

$$\langle \tilde{f}, v\rangle := \langle f, v\rangle + \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j\varphi\partial_i v + b_i\varphi\partial_i v - c_i\partial_i\varphi v\right) - d\varphi v\right) \mathrm{d}\mu.$$

Deshalb können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wegen (4.4) definiert folgende Gleichung

$$\langle -Lu, v\rangle =: \mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u\partial_i v + b_i u\partial_i v - c_i\partial_i uv\right) - duv\right) \mathrm{d}\mu,$$

einen linearen Operator $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$. Genauso definiert

$$\langle Ku, v\rangle := \int_\Omega uv \,\mathrm{d}\mu.$$

einen kompakten Operator $K : W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$, da $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ wegen dem Satz von Rellich 3.42 kompakt ist. Mit der Gardingungleichung (4.5) gilt

$$\langle(-L + C(n, \Lambda)K)u, u\rangle \geq c_0(\Lambda)\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \text{für ein } c_0(\Lambda) > 0 \quad \text{und alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wegen dem Satz von Lax und Milgram 3.1 ist $-L + C(n, \Lambda)K$ ein Isomorphismus. Da L nach Satz 4.2 injektiv ist und K kompakt ist, ist L mit Lemma 3.4 auch ein Isomorphismus. Folglich existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$. Weiter gilt

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \|L^{-1}\| \cdot \|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}.$$

Die gleichmäßige Abschätzung von $C(n, L_n)$ folgt aus dem nächsten Lemma. **q.e.d.**

Lemma 4.4. *Seien $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und L_m, L elliptische Differentialoperatoren, die (4.1)–(4.3) auf Ω erfüllen. Konvergieren $a_{ij,m} \to a_{ij}$ und $c_{i,m} \to c_i$ fast überall auf Ω und $b_{i,m} \to b_i$ und $d_m \to d$ schwach in $L^2(\Omega)$, und erfüllt L (4.6), so existiert $C < \infty$ mit*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\|L_m u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \quad \textit{für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega) \textit{ und für hinreichend großes } m.$$

Beweis: Angenommen, das Lemma ist falsch. Dann existieren $u_m \in W^{1,2}_0(\Omega)$ mit

$$\|f_m\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*} \leq \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \text{und} \qquad f_m := L_m u_m$$

Wir setzen $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Mit (4.5) folgt für ein $c_0(\Lambda) > 0$

$$c_0(\Lambda)\|u_m\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - C(n,\Lambda)\|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \langle -L_m u_m, u_m\rangle \leq \|f_m\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*}\|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$
$$\text{also} \qquad \|u_m\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C'(n,\Lambda)(\|f_m\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*} + \|u_m\|_{L^2(\Omega)}) \leq C''(n,\Lambda)\|u_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

In $W^{1,2}_0(\Omega)^*$ konvergiert $f_m \to 0$ stark. Wegen dem Satz von Rellich 3.42 konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$, wegen dem Satz[1] von Banach und Alaoglu schwach in $W^{1,2}_0(\Omega)$. Wegen Lebesgues beschränkter Konvergenz konvergieren $a_{ij,m} \to a_{ij}$ und $c_{i,m} \to c_i$ stark in $L^2(\Omega)$. Das Skalarprodukt von stark konvergenten mit schwach konvergenten Folgen in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Für $v \in C^1_0(\Omega)$ folgt $Lu = 0$ aus

$$0 \leftarrow \langle f_m, v\rangle = \langle L_m u_m, v\rangle =$$
$$= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(-\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij,m}\partial_j u_m \partial_i v - b_{i,m} u_m \partial_i v + c_{i,m}\partial_i u_m v\Big) + d_m u_m v\Big)\,\mathrm{d}\mu \to \langle Lu, v\rangle$$

schwach auf Ω. Da L (4.6) in Ω erfüllt, ergibt das Schwache Maximumprinzip 4.2 $u = 0$. Dies widerspricht $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leftarrow \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$, da $u_m \to u$ stark in $L^2(\Omega)$. **q.e.d.**

Eine innere Apriori Abschätzung ist die Caccioppoliungleichung.

Caccioppoliungleichung 4.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in W^{1,2}_0(\Omega)^*$ und L erfülle* (4.1)–(4.3) *auf Ω. Auf $\Omega' \Subset \Omega$ erfüllt jede schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n)(\|f\|_{W^{1,2}_0(\Omega)^*} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.7}$$

Beweis: Wir wählen $\eta \in C^\infty_0(\Omega)$ mit $\eta \equiv 1$ auf Ω' und $0 \leq \eta \leq 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Dann folgt gemäß Definition 4.1 und mit (4.2)

$$\int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i v\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n (-b_i u \partial_i v + c_i \partial_i u v) + duv\Big)\,\mathrm{d}\mu - \langle f, v\rangle, \quad \text{also}$$

[1] $\overline{B(0,R)} \subset W^{1,2}_0(\Omega)$ ist schwach folgenkompakt (Theorem III.3.7 in Werner: "Funktionalanalysis").

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2 \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i u\cdot \eta^2 \,\mathrm{d}\mu\\
&\le -\int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i \eta 2\eta u + b_i u \partial_i u \eta^2 + b_i u^2 \partial_i \eta 2\eta - c_i \partial_i u u \eta^2\Big) - du^2\eta^2\Big)\,\mathrm{d}\mu +\\
&\qquad + \|f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)^*}\|u\eta^2\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le\\
&\le C(\Lambda,n)\int_\Omega \big(|\nabla u|\cdot|u|\cdot|\nabla\eta|\cdot|\eta| + |\nabla u|\cdot|u|\eta^2 + u^2\left(|\nabla\eta|\cdot|\eta|+\eta^2\right)\big)\,\mathrm{d}\mu +\\
&\quad + \frac{1}{4\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^4\,\mathrm{d}\mu + C'(\Lambda,n)\int_\Omega u^2(4\eta^2|\nabla\eta|^2+\eta^4)\,\mathrm{d}\mu + C'(\Lambda,n)\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} \le\\
&\le \frac{1}{2\Lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2\eta^2\,\mathrm{d}\mu + C(\Lambda,\eta,n)(\|f\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)^*} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned}
$$

wobei wir $\eta^4 \le \eta^2$ und mehrmals $ab \le \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}$ für $\epsilon > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ anwenden. Wir absorbieren den ersten Term der rechten Seite und erhalten wegen $\eta|_{\Omega'} \equiv 1$ (4.7).**q.e.d.**

Höhere Regularität der Koeffizienten von L und von f überträgt sich auf die Lösung.

Satz von Friedrichs im Inneren 4.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^2(\Omega)$ und L erfülle*

$$
\text{(4.1)–(4.3) } \textit{auf } \Omega \qquad \textit{und} \qquad \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \le \Lambda \textit{ und } \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \le \Lambda. \tag{4.8}
$$

Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω gilt dann

$$
u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \textit{ mit } \|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \le C(\Omega,\Omega',\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \textit{ für } \Omega' \Subset \Omega. \tag{4.9}
$$

Die schwachen Ableitungen von u erfüllen fast überall auf Ω $Lu = f$ d.h.

$$
\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n \partial_j a_{ij} + b_i + c_i\right)\partial_i u + \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i + d\right) u = f. \tag{4.10}
$$

Beweis: Wir vereinfachen $Lu = f$ zu $L_0 u = \hat{f}$, mit einem L_0 das (4.8) erfüllt:

$$
\begin{aligned}
L_0 u := \sum\nolimits_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) &= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum\nolimits_{i=1}^n c_i\partial_i u - du + f\\
&= -\sum\nolimits_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum\nolimits_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat{f} \in L^2(\Omega).
\end{aligned}
$$

Für $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ folgt mit der Caccioppoliungleichung (4.7)

$$
\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} \le C(\Omega,\Omega''',\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{4.11}
$$

Für $\Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$ und $0 < |h|$ so klein, dass $\{x \mid d(x,\Omega'') < |h|\} \Subset \Omega'''$ gilt, liegt der Differenzenquotient (3.14) $\partial_l^h u \in W^{1,2}(\Omega'')$. Für $v \in W_0^{1,2}(\Omega'') \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
&\langle -L_0(\partial_l^h u), v\rangle = \mathcal{L}_0(\partial_l^h u, v) = \int_{\Omega''} \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j \partial_l^h u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_l^h \partial_j u \partial_i v\,\mathrm{d}\mu \\
&= -\int_\Omega \sum_{ij} \partial_j u \partial_l^{-h}(a_{ij}\partial_i v)\,\mathrm{d}\mu = -\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l^{-h} v\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega \sum_{ij} \partial_l^{-h} a_{ij}\partial_j u \partial_i v(\cdot - he_l)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\Omega'''} \hat{f}\partial_l^{-h} v\,\mathrm{d}\mu - \int_{\Omega''} \sum\nolimits_{ij} \partial_l^h a_{ij}\partial_j u(\cdot + he_l)\partial_i v\,\mathrm{d}\mu =: \langle -f_l^h, v\rangle. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

mit diskreter partieller Integration und $L_0 u = \hat{f}$. Wegen Proposition 3.25 (3.15) gilt $\|\partial_l^{-h} v\|_{L^2(\Omega''')} \le \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')}$ und $f_l^h \in W_0^{1,2}(\Omega'')^*$. Aus (4.7) und (4.11) folgt

$$\begin{aligned}
\|f_l^h\|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} &\le C(n)(\|\hat{f}\|_{L^2(\Omega''')} + \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega''')}) \\
&\le C(\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

(4.12) besagt $L_0(\partial_l^h u) = f_l^h$ schwach auf Ω''. Mit (3.15) und (4.7) folgt $\|\partial_l^h u\|_{W^{1,2}(\Omega')} \le$

$$\le C(\Omega'',\Omega',\Lambda,n)(\|f_l^h\|_{W_0^{1,2}(\Omega'')^*} + \|\partial_l^h u\|_{L^2(\Omega'')}) \le C(\Omega,\Omega',\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Mit Proposition 3.25 (3.17) folgt (4.9), da $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $W^{1,2}(\Omega')$ nach Proposition 3.25 (3.15). Da $a_{ij}, b_i \in C^{0,1}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ und $\nabla u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, folgt mit der Produktregel Proposition 3.28 $a_{ij}\partial_j u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $b_i u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\nabla(a_{ij}\partial_j u) = (\nabla a_{ij})\partial_j u + a_{ij}\partial_j \nabla u$ und $\nabla(b_i u) = (\nabla b_i)u + b_i \nabla u$. Für $v \in C_0^1(\Omega)$ folgt

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega f v\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v\Big) - duv\Big)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \Big(\sum\nolimits_{j=1}^n -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) - c_i\partial_i u\Big) - du\Big) v\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Da $v \in C_0^1(\Omega)$ beliebig war, folgt die letzte Aussage (4.10). **q.e.d.**

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne wieder $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0,\infty)$ und $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Caccioppoliungleichung am Rand 4.7. *Sei $f \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*$, $\varphi \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ und L erfülle (4.1)–(4.3) auf $B(0,2)_+$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ von $Lu = f$ auf $B(0,2)_+$ mit $u = \varphi$ auf $B(0,2)_0$ gemäß Definition 3.36 gilt dann*

$$\|u\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} \le C(\Lambda,n)(\|f\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} + \|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

Beweis: Wegen $\|L\varphi\|_{W_0^{1,2}(B(0,2)_+)^*} \leq C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{1,2}(B(0,2)_+)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 \leq \eta \leq 1$ und setzen $v := u\eta^2 \in W_0^{1,2}(B(0,2)_+)$ mit Definition 3.36, da $u = 0$ auf $B(0,2)_0$. Der Rest des Beweises verläuft wie der Beweis der Caccioppoliungleichung 4.5. **q.e.d.**

Globaler Satz von Friedrichs 4.8. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ und L erfülle (4.8) auf Ω. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω mit $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt dann fast überall auf Ω (4.10) und*

$$u \in W^{2,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.14)$$

Beweis: Aus dem Satz von Friedrichs im Inneren 4.6 folgt $u \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (4.10). Wegen $\|L\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(n)\Lambda\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Wegen $\partial\Omega \in C^{1,1}$ gibt es für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{1,1}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren

$$\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+) \cap W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(B(0,2)_+).$$

Aus Proposition 3.31 und $\Psi \in C^{1,1}(U(x_0))$ folgt $\partial_j u = ((\partial_l \tilde{u}) \circ \Psi)\, \partial_j \Psi_l$. Da $u = 0$ auf $\partial\Omega$, gilt $\tilde{u} = 0$ auf $B(0,2)_0$. Für $\tilde{v} \in C_0^1(B(0,2)_+)$ ist $v := \tilde{v} \circ \Psi \in C_0^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega fv \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \left(\sum\nolimits_{j=1}^n a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u \partial_i v - c_i \partial_i u v\right) - duv\right) \mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega \sum\nolimits_{ijkl} a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k (\partial_l \tilde{u} \circ \Psi)(\partial_k \tilde{v} \circ \Psi)\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \sum\nolimits_{ik} b_i \partial_i \Psi_k (\tilde{u} \circ \Psi)(\partial_k \tilde{v} \circ \Psi)\,\mathrm{d}\mu - \\
&\quad - \int_\Omega \sum\nolimits_{ik} c_i \partial_i \Psi_k (\partial_k \tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi)\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega d(\tilde{u} \circ \Psi)(\tilde{v} \circ \Psi)\,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{B(0,2)_+} \left(\sum\nolimits_k \left(\sum\nolimits_l \tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u} \partial_k \tilde{v} + \tilde{b}_k \tilde{u} \partial_k \tilde{v} - \tilde{c}_k \partial_k \tilde{v}\right) - \tilde{d}\tilde{u}\tilde{v}\right) \mathrm{d}\mu = -\int_{B(0,2)_+} \tilde{f}\tilde{v}\,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

also $$\tilde{L}\tilde{u} := \sum\nolimits_k \left(\partial_k \left(\sum\nolimits_l \tilde{a}_{kl}\partial_l \tilde{u} + \tilde{b}_k \tilde{u}\right) + \tilde{c}_k \partial_k \tilde{u}\right) + \tilde{d}\tilde{u} = \tilde{f} \text{ auf } B(0,2)_+ \text{ mit}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{kl} &:= \sum\nolimits_{ij} (a_{ij}\partial_j \Psi_l \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} |\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi) \max_{ij} \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\
\tilde{b}_k &:= \sum\nolimits_i (b_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{b}_k\|_{C^{0,1}(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi) \max_i \|b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\
\tilde{c}_k &:= \sum\nolimits_i (c_i \partial_i \Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{c}_k\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi) \max_i \|c_i\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (4.15) \\
\tilde{d} &:= d \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{d}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\|d\|_{L^\infty(\Omega)} \\
\tilde{f} &:= f \circ \Psi^{-1} \cdot |\det(D\Psi^{-1})| & \|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} &\leq C(\Psi)\|f\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für alle $y = \Psi(x)$ gilt dann mit (4.2) für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{kl} \tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l = \sum_{ijkl} a_{ij}(x)\partial_i\Psi_k(x)\xi_k\partial_j\Psi_l(x)\xi_l \cdot |\det(D\Psi^{-1}(y))|$$
$$\geq \Lambda^{-1}\sum_i \Big|\sum_k \partial_i\Psi_k(x)\xi_k\Big|^2 \cdot |\det(D\Psi^{-1}(y))| \geq c_0(\Psi,\Lambda)|\xi|^2,$$

da Ψ ein Diffeomorphismus ist, also $D\Psi(x)$ invertierbar ist. Also erfüllen $\tilde{L}$ und $\tilde{u}$ alle Bedingungen des Satzes in $B(0,2)_+$ mit geeignetem $\tilde{\Lambda} = C(\Psi,\Lambda)$. Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir dies zu $\tilde{L}_0\tilde{u} := \sum_{kl} \partial_k(\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u}) = \hat{f}$ schwach auf $B(0,2)_+$ mit

$$\|\hat{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|\tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,\frac{3}{2})_+)}) \leq$$
$$\leq C(\Psi,\Lambda)(\|\tilde{f}\|_{L^2(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2)_+)}) \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad (4.16)$$

wobei wir die Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 verwendet haben. Für $0 < |h| < \frac{1}{4}$, $l = 1,\ldots,n-1$ ist $\partial_l^h\tilde{u} \in W^{1,2}(B(0,\frac{5}{4})_+)$ mit $\partial_l^h\tilde{u} = 0$ auf $B(0,\frac{5}{4})_0$. Mit (4.12) gilt

$$\tilde{L}_0(\partial_l^h\tilde{u}) = \tilde{f}_l^h \qquad \text{schwach auf} \qquad B(0,\tfrac{5}{4})_+.$$

Mit der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7, (4.13) und (4.16) folgt

$$\|\tilde{f}_l^h\|_{W_0^{1,2}(B(0,\frac{5}{4})_+)^*} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$
$$\|\partial_l^h\tilde{u}\|_{W^{1,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Da $\partial_l^h\tilde{u} \to \partial_l\tilde{u}$ stark in $L^2_{\text{loc}}(B(0,1)_+)$, folgt $\partial_l\tilde{u} \in W^{1,2}(B(0,1)_+)$ und, da wir $\tilde{u} \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B(0,2)_+)$ bereits wissen, folgt $\partial_k\partial_l\tilde{u} \in L^2(B(0,1)_+)$ und zunächst

$$\|\partial_k\partial_l\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für} \qquad (k,l) \neq (n,n).$$

Mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $\tilde{L}_0\tilde{u} = \hat{f}$ erhalten wir für die verbleibenden

$$\partial_n^2\tilde{u} = \tilde{a}_{nn}^{-1}\left(-\sum_{(k,l)\neq(n,n)} \tilde{a}_{kl}\partial_k\partial_l\tilde{u} - \sum_{k,l=1}^n \partial_k\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u} + \hat{f}\right) \text{ in } B(0,2)_+,$$

also mit (4.2) und der Caccioppoliungleichung am Rand 4.7 ebenfalls

$$\|\partial_n^2\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda)(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $\tilde{u} \in W^{2,2}(B(0,1)_+)$ und für $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ der Anteil von (4.14) in $W^{2,2}(V(x_0)\cap\Omega)$ aus Proposition 3.31 mit der Konstanten $C(\Psi,\Lambda)$. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_1,\ldots,x_N \in \partial\Omega$ und $\delta > 0$ mit

$$\partial\Omega \subset \{x \mid d(x,\partial\Omega) < 2\delta\} \subset V(x_1)\cup\ldots\cup V(x_N).$$

aus Satz 4.6 (4.9) für $\Omega' := \{x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) > \delta\} \Subset \Omega$ folgt (4.14). **q.e.d.**

Aus dem Sätzen von Friedrichs 4.6 und 4.8 ergibt sich folgender Regularitätssatz.

Satz 4.9. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ und L erfülle für ein $1 \leq \Lambda < \infty$ (4.1),(4.2) und $\|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|b_i\|_{C^{k,1}(\Omega)} \leq \Lambda$, $\|c_i\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$ und $\|d\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda$. Für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω folgt*

$$u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \text{ für } \Omega' \Subset \Omega. \quad (4.17)$$

Falls $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ und $u - \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ mit $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$, so folgt

$$u \in W^{k+2,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.18)$$

Beweis*: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $C^{-1,1}(\Omega)$ ersetzt durch $L^\infty(\Omega)$ sind dies die Aussagen der Sätze von Friedrichs, Sätze 4.6 und 4.8.

Wenn die obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ gilt, dann folgt $u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und

$$\text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega \quad \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} \leq C(\Omega,\Omega'',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad (4.19)$$

$$\text{bzw. } u \in W^{k+1,2}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.20)$$

Wie im Beweis von Satz 4.6 vereinfachen wir die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} L_0 u : &= \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = -\sum_{i=1}^n \partial_i(b_i u) - \sum_{i=1}^n c_i \partial_i u - du + f \\ &= -\sum_{i=1}^n \partial_i b_i u - \sum_{i=1}^n (b_i + c_i)\partial_i u - du + f =: \hat f \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\hat f\|_{W^{k,2}(\Omega'')} &\leq C(\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega'')} + \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')}) \\ &\leq C(\Omega,\Omega'',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \qquad \text{für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{bzw. } \hat f \in W^{k,2}(\Omega) \text{ mit } \quad \|\hat f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.22)$$

Wegen $a_{ij} \in C^{k,1}(\Omega) \subset W^{k+1,\infty}(\Omega)$ und $u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ folgt mit der Produktregel Proposition 3.28 $a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\partial_l a_{ij}\partial_j u \in W^{k,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und für $v \in C^\infty_0(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_l u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu &= -\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\partial_j u \partial_i \partial_l v \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega \sum_{ij} \partial_l a_{ij}\partial_j u \partial_i v \,\mathrm{d}\mu = \\ = \int_\Omega \hat f \partial_l v \,\mathrm{d}\mu &+ \int_\Omega \sum_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) v \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \Big(-\partial_l \hat f + \sum_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\Big) v \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

$$\text{Dies ergibt} \qquad L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat f - \sum_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right) =: \bar f_l \text{ schwach auf } \Omega. \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt} \quad \Big\|\sum_{ij} \partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\Big\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')} &\leq \sum_i \Big\|\sum_j \partial_l a_{ij}\partial_j u\Big\|_{W^{k,2}(\Omega'')} \leq \\ \leq C(n,\Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega'')} &\leq C(\Omega,\Omega'',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

mit (4.19). Aus (4.19) für $k-1$ folgt $\partial_l u \in W^{k+1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ also $u \in W^{k+2,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, und aus (4.19), (4.21) und (4.23) schließlich (4.17): $\qquad \|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega')} \leq$

$$\leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)\left(\|\partial_l\hat{f}\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')}+\left\|\sum\nolimits_{ij}\partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega'')}+\|\partial_l u\|_{L^2(\Omega'')}\right)$$
$$\leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da $\|v\|_{W^{k+2,2}(V)}\sim\|v\circ\Psi^{-1}\|_{W^{k+2,2}(\Psi(V))}$ mit einer von Ψ und n abhängigen Konstanten, genügt es lokal $\Omega\cap B(0,2)=B(0,2)_+$ zu betrachten. Aus (4.20) folgt

$$\begin{aligned}\left\|\sum\nolimits_{ij}\partial_i\left(\partial_l a_{ij}\partial_j u\right)\right\|_{W^{k-1,2}(\Omega)}\leq\left\|\sum\nolimits_{ij}\partial_l a_{ij}\partial_j u\right\|_{W^{k,2}(\Omega)}&\leq C(n,\Lambda)\|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)}\\&\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k-1,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}),\end{aligned}$$

Mit (4.22) und (4.23) folgt $L_0(\partial_l u)=\bar{f}_l$ schwach auf $B(0,2)_+$ für $l=1\ldots,n$ mit

$$\|\bar{f}_l\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)}\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}).\tag{4.24}$$

Wir wählen $B(0,\frac{4}{3})_+\subset\Omega_0\subset B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0\in C^\infty$ und $\eta\in C_0^\infty(B(0,\frac{4}{3}))$ mit $\eta\equiv 1$ auf $B(0,1)$. Mit Proposition 3.40 und Definition 3.36 folgt $\eta\partial_l u\in W_0^{1,2}(\Omega_0)$ für $l=1,\ldots,n-1$ und aus $L_0(\partial_l u)=\bar{f}_l$, $u\in W^{k+2,2}_{\text{loc}}(B(0,2)_+)$ und $a_{ij}\in C^{k,1}(B(0,2)_+)$,

$$\begin{aligned}L_0(\eta\partial_l u)&=\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\partial_j(\eta\partial_l u))=\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\eta\partial_j\partial_l u)+\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u)\\&=\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\partial_j\partial_l u)\eta+\sum\nolimits_{ij}a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta+\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u)\\&=\bar{f}_l\eta+\sum\nolimits_{ij}a_{ij}\partial_j\partial_l u\partial_i\eta+\sum\nolimits_{ij}\partial_i(a_{ij}\partial_j\eta\partial_l u):=\bar{f}_{l,\eta}\text{ schwach in }B(0,2)_+,\\&\text{wobei}\quad\|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(B(0,2)_+)}\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)})\end{aligned}$$

wegen (4.20) und (4.24). Mit (4.20) folgt $\eta\partial_l u\in W^{k+1,2}(\Omega_0)$ für $k-1$ und

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(B(0,1)_+)}\leq\|\eta\partial_l u\|_{W^{k+1,2}(\Omega_0)}&\leq C(\Lambda,n,k)\|\bar{f}_{l,\eta}\|_{W^{k-1,2}(\Omega_0)}+\|\eta\partial_l u\|_{L^2(\Omega_0)})\\&\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}),\qquad\text{also zunächst}\\\|\partial_i\partial_j u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)}&\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\quad\text{für}\quad(i,j)\neq(n,n),\end{aligned}$$

da wir $u\in W^{k+2,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ bereits wissen. Wie am Ende von Beweis von Satz 4.8, erhalten wir mit (4.10) aus Satz 4.6 angewandt auf $L_0u=\hat{f}$ für die verbleibenden

$$\partial_n^2 u=a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n,n)}a_{ij}\partial_i\partial_j u-\sum\nolimits_{i,j=1}^n\partial_i a_{ij}\partial_j u+\hat{f}\right)\qquad\text{auf }B(0,2)_+,$$

also mit (4.2), (4.22) und (4.20) ebenfalls

$$\|\partial_n^2 u\|_{W^{k,2}(B(0,1)_+)}\leq C(\Omega,\Lambda,n,k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Es folgt $u \in W^{k+2,2}(B(0,1)_+)$ zuerst lokal

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, k)(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

und dann mit endlich vielen Bällen $\supset \partial\Omega$ und (4.17) $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ mit (4.18). **q.e.d.**

Für glatte Daten sind auch die Lösungen glatt.

Korollar 4.10. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und L erfülle* (4.1) *und* (4.2) *auf Ω mit glatten Koeffizienten. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ für eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = f$. Ist weiter $\partial\Omega \in C^\infty$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ für ein $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, so gilt $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.*

Beweis*: Aus Satz 4.9 folgt $u \in W^{k,2}_{\text{loc}}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Morrey 3.49 ergibt sich $u \in C^\infty(\Omega)$. Im Fall mit Rand folgt aus Satz 4.9 $u \in W^{k,2}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Wieder ergibt der Satz von Morrey 3.49 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. **q.e.d.**

4.2 Schauderabschätzungen

Wir betrachten einen elliptischen Differentialoperator L (2.3) in Nicht-Divergenzform auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen für $u \in C^2(\Omega)$. Dabei seien $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $b_i \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ und $c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ für ein $0 < \alpha < 1$, kurz $L \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, und es gelte für ein $1 \leq \Lambda < \infty$

$$\|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.25}$$
$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.26}$$

Innere Schauderabschätzung 4.11. *Ein elliptisches L in Nicht-Divergenzform* (2.3) *erfülle* (4.25) *und* (4.26)*. Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right).$$

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zuerst $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4.12. *Für $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u < \infty$ gilt*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u \leq C(n,\alpha)\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u.$$

Beweis[2]: Angenommen die Aussage ist falsch, d.h. es existiert kein $C(n,\alpha) < \infty$. Dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u_m < \frac{1}{m}\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2u_m < \infty.$$

[2]siehe Theorem 1 in L.Simon: "Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Ersetzen wir u_m durch $\lambda_m u_m$ mit geeignetem $\lambda_m > 0$, so können wir $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1$ annehmen. Dann existiert ein Multiindex γ mit $|\gamma| = 2$ und ein $i \in 1, \ldots, n$, so dass für eine Teilfolge jeweils für ein $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt:

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n} \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha} u_m(x_m + h_m x)$ so bleiben die bisherigen Annahmen unverändert. Also können wir o.B.d.A. zusätzlich folgendes annehmen:

$$|\partial^\gamma u_m(e_i) - \partial^\gamma u_m(0)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Das Substrahieren eines beliebigen Polynoms höchstens zweiten Grades läßt diese und die bisherigen Annahmen unverändert. Zusätzlich können wir also folgendes annehmen:

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2 u_m(0) = 0.$$

Aus $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2 u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n) R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n) R^{2+\alpha}.$$

Mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u_m = 1$ folgt $\qquad \|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R))} \leq C(n, \alpha, R)$.
Damit konvergiert für eine weitere Teilfolge $u_m \to u$ stark in $C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aus allen diesen Bedingungen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \triangle u = 0$, also $\triangle u \equiv \text{const}$ in $\mathbb{R}^n$ und

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq 1 \qquad \partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0) \qquad D^2 u(0) = 0$$

Daraus folgt $\triangle u = 0$. Auf $x \in B(0, R)$ ergibt Korollar 2.2 wegen $\partial B(x, R) \subset \overline{B(0, 2R)}$

$$\|\partial^\gamma u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n, |\gamma|) R^{-|\gamma|+2+\alpha} \qquad \text{für beliebige Multiindices } \gamma.$$

Für $|\gamma| \geq 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und u ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2 u$ konstant. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(e_i) \neq \partial^\gamma u(0)$, da $|\gamma| = 2$. **q.e.d.**

Betrachtet man eine lineare Transformation, so erhält man folgende Proposition:

Proposition 4.13. *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad |a_{ij}| \leq \Lambda.$$

Für $0 < \alpha < 1$ *und* $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u < \infty$ *gilt dann*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha) \, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha} \left(\sum_{ij} a_{ij} \partial_i \partial_j u \right).$$

Beweis: Da $\partial_i\partial_j u$ symmetrisch in i,j ist, können wir $a_{ij}=a_{ji}$ annehmen. Dann ist $A:=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit und $\Lambda^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}\leq A\leq C(n)\Lambda\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Die positive Wurzel $B=(b_{ij})$ von A erfüllt $A=B^2$, $B^t=B$ und $\Lambda^{-1/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}\leq B\leq C(n)\Lambda^{1/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Setzen wir $\tilde{u}(x):=u(Bx)$, so ist $\tilde{u}\in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\partial_k\tilde{u}(x)=\sum\nolimits_i\partial_i u(Bx)b_{ik}\quad \partial_k\partial_l\tilde{u}(x)=\sum\nolimits_{ij}\partial_i\partial_j u(Bx)b_{ik}b_{jl}\quad \triangle\tilde{u}(x)=\sum\nolimits_{ij}a_{ij}\partial_i\partial_j u(Bx)$$

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\triangle\tilde{u}\leq C(n)\Lambda^{\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij}a_{ij}\partial_i\partial_j u\right)<\infty$$
$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2\tilde{u}\leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2u<\infty\quad \text{höl}_{\mathbb{R}^n\alpha}D^2u\leq C(n)\Lambda^{1+\alpha/2}\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2\tilde{u}.$$

Also erfüllt $\tilde{u}$ die Voraussetzungen von Proposition 4.12 und die Poposition folgt aus

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2\tilde{u}\leq C(n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\triangle\tilde{u}.$$ **q.e.d.**

Wir beweisen zuerst folgende schwächere Version von Satz 4.11.

Proposition 4.14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.11 gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))}\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}+\|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

Beweis: Wir wählen $\eta\in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta\equiv 1$ auf $B(0,1)$ und betrachten zunächst alle $0<\varrho<1/2$. Für $x_0\in\overline{B(0,1)}$ gilt $B:=B(x_0,2\varrho)\subset B(0,2)$, und wir setzen

$$\eta_{x_0,\varrho}(x):=\eta(\tfrac{x-x_0}{\varrho})\qquad\qquad v:=u\eta_{x_0,\varrho}\in C^{2,\alpha}_0(B).$$

Es gilt $v=u$ auf $B(x_0,\varrho)$. Aus der Proposition 4.13 folgt mit (4.25) und (4.26)

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}D^2v\leq C(\Lambda,n,\alpha)\,\text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\left(\sum\nolimits_{ij}a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v\right).$$

Wir schreiben
$$\sum\nolimits_{ij}a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j v=\sum\nolimits_{ij}\left(a_{ij}\partial_i\partial_j v-(a_{ij}-a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\right)$$
$$=Lv-\sum\nolimits_i b_i\partial_i v-cv-\sum\nolimits_{ij}(a_{ij}-a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v.$$

Dann ergibt sich aus obiger Abschätzung, Proposition 3.12 und (3.4) $\quad\text{höl}_{B,\alpha}D^2v\leq$

$$\leq C(\Lambda,n,\alpha)\Big(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv)+\text{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_{ij}(a_{ij}-a_{ij}(x_0))\partial_i\partial_j v\Big)+\text{höl}_{B,\alpha}\Big(\sum\nolimits_i b_i\partial_i v+cv\Big)\Big)$$
$$\leq C(\Lambda,n,\alpha)\max_{ij}\big(\|a_{ij}-a_{ij}(x_0)\|_{L^\infty(B)}\text{höl}_{B,\alpha}(D^2v)+\text{höl}_{B,\alpha}(a_{ij}-a_{ij}(x_0))\|D^2v\|_{L^\infty(B)}\big)+$$
$$+C(\Lambda,n,\alpha)\left(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv)+\left(\max_i\|b_i\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}+\|c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\right)\|v\|_{C^{1,\alpha}(B)}\right)$$
$$\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\varrho^\alpha\,\text{höl}_{B,\alpha}(D^2v)+\text{höl}_{B,\alpha}(Lv)+\|v\|_{C^2(B)}\right).$$

Wir absorbieren für hinreichend kleines $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$ den ersten Term und erhalten

$$\text{höl}_{B,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B)}\right).$$

Schließlich rechnen wir und schätzen ab

$$\begin{aligned}
\|v\|_{C^2(B)} &\leq C\|u\|_{C^2(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^2(B)} \leq C(\varrho)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \leq C(\Lambda, n, \alpha)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \\
Lv &= \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(u\eta_{x_0,\varrho}) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u\eta_{x_0,\varrho}) + cu\eta_{x_0,\varrho} \\
&= Lu \cdot \eta_{x_0,\varrho} + \sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + \partial_j u\partial_i\eta_{x_0,\varrho} + ua_{ij}\partial_i\partial_j\eta_{x_0,\varrho} + ub_i\partial_i\eta_{x_0,\varrho} \\
\text{höl}_{B,\alpha}(Lv) &\leq C\|Lu, \nabla u, u\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|1, a_{ij}, b_i, c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))}\|\eta_{x_0,\varrho}\|_{C^{2,\alpha}(B)} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^{1,\alpha}(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit $v|_{B(x_0,\varrho)} = u|_{B(x_0,\varrho)}$ ergeben alle diese Abschätzungen

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).$$

Da $x_0 \in B(0,1)$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, folgt die Aussage aus

$$\begin{aligned}
\text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2 u &\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right) \\
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq \text{höl}_{B(0,1),\alpha} D^2 u + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2))} \\
&\leq C(\Lambda, n, \alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{C^2(B(0,2))}\right).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis* von Satz 4.11: Sei[3] $S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)} := \sup_{x \in B(0,2)} d(x, \partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2 u(x)|$ mit $S < \infty$ wegen $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2))$. Für $x_0 \in B(0,2)$ sei $\varrho := \frac{1}{3}d(x_0, \partial B(0,2)) < 1$, also $B(x_0, 2\varrho) \subset B(0,2)$ und $x \in B(x_0, 2\varrho)$. Wir reskalieren folgendermaßen für $x \in B(0,2)$ und erhalten mit (4.25) und $\varrho \leq 1$

$$\tilde{u}(x) := u(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(x_0 + \varrho x) \quad \tilde{c} := \varrho^2 c(x_0 + \varrho x)$$

$$\begin{aligned}
Lu(x_0 + \varrho x) &= \left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum\nolimits_i b_i\partial_i u + cu\right)(x_0 + \varrho x) \\
&= \left(\varrho^{-2}\sum\nolimits_{ij} \tilde{a}_{ij}\partial_i\partial_j\tilde{u} + \varrho^{-1}\sum\nolimits_i \tilde{b}_i\varrho^{-1}\partial_i\tilde{u} + \varrho^{-2}\tilde{c}\tilde{u}\right)(x) = \varrho^{-2}\tilde{L}\tilde{u}(x)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} &= \varrho^2\|D^2 u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \qquad \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \leq \varrho^{-n/2}\|u\|_{L^2(B(0,2))} \\
\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} &= \varrho^{n/2+2}\|D^2 u\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} \leq S \\
\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &= \varrho^2\|Lu\|_{L^\infty(B(x_0,2\varrho))} + \varrho^{2+\alpha}\,\text{höl}_{B(x_0,2\varrho),\alpha}(Lu) \leq \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} \\
\|\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} &\leq \|a_{ij}, b_i, c\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} \leq \Lambda.
\end{aligned}$$

[3] Um in Proposition 4.14 die C^2-Norm in eine L^2-Norm zu absorbieren, müssen die Gebiete der Normen auf beiden Seiten der Ungleichung übereinstimmen. Damit der Rand dann keine Schwierigkeiten macht, bilden wir das Supremum über das Produkt mit einer Funktion, die am Rand verschwindet.

Insbesondere erfüllt $\tilde{L}$ (2.3), (4.25) und(4.26) auf $B(0,2)$. Wegen Proposition 3.15 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3:

$$C^2(B(0,2)) \to C^1(B(0,2)) \hookrightarrow L^2(B(0,2)) \text{ und } C^{2,\alpha}(B(0,1)) \to C^2(B(0,1)) \hookrightarrow L^2(B(0,1)).$$

Mit $\|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))} \leq \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} + C(n)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))}$ absorbieren wir in der ersten der folgenden Ungleichungen den Term $\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))}$ und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))} = \|\tilde{u}\|_{C^1(B(0,2))} + \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} &\leq C(n)(\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))}) \\ \|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,1))} &\leq \epsilon\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n,\alpha,\epsilon)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))}.\end{aligned}$$

Zusammen ergeben alle diese Abschätzungen mit Proposition 4.14 wegen $\varrho \leq 1$

$$\begin{aligned}
&d(x_0, \partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| \leq (3\varrho)^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} = 3^{n/2+2}\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,1))} \\
&\quad\leq \epsilon\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\quad\leq C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon\varrho^{n/2}\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2))}\right) + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,1))} \\
&\quad\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \epsilon\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(0,2))}\right) + C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(0,2))} \\
&\quad\leq C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right) + C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon S.
\end{aligned}$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,\alpha)$

$$S \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2))} + \|u\|_{L^2(B(0,2))}\right).$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.14 folgt mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})$ anstatt $B(0,2)$

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1))} &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2}))}\right) \\ &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2}))} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2}))} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))}\right).\end{aligned}$$

Aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2}))} \leq 2^{n/2+2}S$ folgt dann die Behauptung. **q.e.d.**

Für die Existenz klassischer Lösungen brauchen wir Abschätzungen am Rand.

Schauderabschätzungen am Rand 4.15. *Ein elliptisches L (2.3) erfülle (4.25) und (4.26) auf $B(0,2)_+ \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $u, \varphi \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $u = \varphi$ auf $B(0,2)_0$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda,n,\alpha)(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}).$$

Aus Proposition 3.12 folgt $\|L\varphi\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq C(\Lambda,n,\alpha)\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)}$. Also können wir o.B.d.A. $\varphi = 0$ setzen. Zuerst betrachten wir wieder $L = \triangle$ auf $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$.

Proposition 4.16. *Für* $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit* $0<\alpha<1$, $u|_{\mathbb{R}^n_0}=0$ *und* $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u)<\infty$ *gilt*

$$\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u) \leq C(n,\alpha)\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u).$$

Beweis[4]**:** Falls die Aussage ist falsch, dann existiert eine Folge $u_m \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$u_m|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 \qquad \mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(\triangle u_m) < m^{-1}\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u_m) < \infty.$$

Wir renormieren $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u_m) = 1$. Wieder existiert ein Multiindex γ mit $|\gamma| = 2$ und $i \in \{1,\dots,n\}$, so dass für eine Teilfolge und geeignete $x_m \in \mathbb{R}^n$ und $h_m > 0$ folgendes gilt

$$\frac{|\partial^\gamma u_m(x_m + h_m e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)|}{h_m^\alpha} \geq \frac{1}{2n}\,\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}\,\partial^\gamma u_m \geq \frac{1}{2n^3} > 0.$$

Nach einer Translation um einen Vektor aus $\mathbb{R}^n_0$ können wir $|x_m| = \langle x_m, e_n\rangle$ annehmen. Wir unterscheiden zwischen $\lim_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = +\infty$ und $\lim\inf_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < +\infty$:

Im Fall $\lim_{m\to\infty} h_m^{-1}\langle x_m, e_n\rangle = \infty$ reskalieren wir durch $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha}u_m(x_m + h_m x)$. Nach Subtraktion eines Polynoms vom Grad höchstens zwei konvergiert eine Teilfolge $u_m \to u$ in $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, was wie in Proposition 4.12 zum Widerspruch führt.

Im zweiten Fall $\lim\inf_{m\to\infty} h_m^{-1}|x_m| < \infty$ reskalieren wir $\tilde{u}_m(x) := h_m^{-2-\alpha}u_m(h_m x)$. Dadurch bleiben alle bisherigen Annahmen unverändert, und wir können o.B.d.A.

$$|\partial^\gamma u_m(x_m + e_i) - \partial^\gamma u_m(x_m)| \geq \frac{1}{2n^3} > 0$$

annehmen. Nach Übergang zu einer Telfolge konvergiert $\tilde{x}_m = h_m^{-1}x_m$ gegen $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Nach Subtraktion der Taylorpolynome zweiten Grades bei dem Randpunkt $x = 0$

$$P_m(x) := u_m(0) + \nabla u_m(0)\cdot x + \tfrac{1}{2}x^t D^2u_m(0)x$$

bleiben alle Annahmen unverändert, und wir können O.B.d.A.

$$u_m(0) = 0 \qquad \nabla u_m(0) = 0 \qquad D^2u_m(0) = 0.$$

annehmen. Aus $\mathrm{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2u_m) = 1$ und dem Mittelwertsatz folgt

$$\|D^2u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq R^\alpha \quad \|\nabla u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n)R^{1+\alpha} \quad \|u_m\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n)R^{2+\alpha}.$$

also $\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,R)_+)} \leq C(n,\alpha,R)$.. Damit konvergiert in $C^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ eine weitere Teilfolge $u_m \to u$. Aus diesen Annahmen folgt $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit

$$\begin{array}{ccc} u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0 & \triangle u \equiv \mathrm{const} & \mathrm{höl}_{\overline{\mathbb{R}^n_+},\alpha}(D^2u) \leq 1 \\ \partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0) & D^2u(0) = 0 & \|u\|_{L^\infty(B(0,R)_+)} \leq C(n)R^{2+\alpha}. \end{array}$$

[4]siehe Theorem 4 in L.Simon: "Schauder estimates by scaling", Calc. of var. and Par. Diff. Eq. 5.

Wegen den mittleren Bedingungen ist u harmonisch auf $\mathbb{R}^n_+$. Wegen der ersten gilt $\partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$ für $l = 1, \ldots, n-1$, also $\partial_n^2 u = -\sum_{l=1}^{n-1} \partial_l^2 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n_0$. Setzen wir $u(y,t) := -u(y,-t)$ für $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $t \leq 0$, so sehen wir zuerst $u \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Weiter ist $\partial_l \partial_n u$ stetig für $l = 1, \ldots, n-1$, und dasselbe gilt für $1 \leq l, k \leq n-1$ oder $(l,k) = (n,n)$, da $\partial_l \partial_k u(y,0) = 0$ für diese l, k. Somit ist $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, also $\triangle u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$. Mit Korollar 2.2 folgt $\|D^k u\|_{L^\infty(B(0,R))} \leq C(n,k) R^{-|k|+2+\alpha}$ für beliebige Multiindizes k. Für $|k| \geq 3$ und $R \to \infty$ folgt $D^3 u = 0$ auf $\mathbb{R}^n$, und u ist ein quadratisches Polynom. Insbesondere ist $D^2 u$ konstant, also $D^2 u \equiv D^2 u(0) \equiv 0$. Dies widerspricht $\partial^\gamma u(x_0 + e_i) \neq \partial^\gamma u(x_0)$ wegen $|\gamma| = 2$. Damit ist die Proposition bewiesen. **q.e.d.**

Wie bei den inneren Abschätzungen folgt

Proposition 4.17. *Es sei* $1 \leq \Lambda < \infty$ *und* $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mit*

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \Lambda^{-1} |\xi|^2 \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad |a_{ij}| \leq \Lambda.$$

Für $u \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ *mit* $0 < \alpha < 1$ *und* $u|_{\mathbb{R}^n_0} = 0$ *und* $\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) < \infty$ *gilt dann*

$$\text{höl}_{\mathbb{R}^n_+,\alpha}(D^2 u) \leq C(\Lambda, n, \alpha)\, \text{höl}_{\mathbb{R}^n,\alpha}(a_{ij} \partial_i \partial_j u). \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Wieder beweisen wir zuerst eine schwächere Version von Satz 4.15

Proposition 4.18. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.15 für* L *auf* $B(0,2)_+$ *gilt*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)} \right).$$

Beweis: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir wählen $\eta \in C_0^\infty(B(0,2))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und $0 < \varrho < 1/2$ klein, wie unten beschrieben. Für $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ gilt $B := B(x_0, 2\varrho) \subset B(0,2)$, und wie im Beweis von Proposition 4.14 definieren wir

$$\begin{array}{lll} \eta_{x_0,\varrho} \in C_0^\infty(B) & \text{mit} & \eta_{x_0,\varrho}(x) := \eta(\frac{x - x_0}{\varrho}) \\ v \in C^{2,\alpha}(B_+) & \text{mit} & v := u \cdot \eta_{x_0,\varrho} \in C_0^{2,\alpha}(B_+ \cup B_0) \\ \operatorname{supp} v \subset B_+ \cup B_0 & & v|_{B_0} = 0 \qquad v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}. \end{array}$$

Aus (4.25),(4.26) und $v|_{B_0} = 0$ folgt mit Proposition 4.17

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha)\, \text{höl}_{B_+,\alpha} \left(\sum_{ij} a_{ij}(x_0) \partial_i \partial_j v \right).$$

Daraus ergibt sich dann wie im Beweis von Proposition 4.14

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha) \varrho^\alpha\, \text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v + C(\Lambda, n, \alpha) \left(\text{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)} \right).$$

Wählen wir $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$ klein genug, so erhalten wir

$$\text{höl}_{B_+,\alpha} D^2 v \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\text{höl}_{B_+,\alpha}(Lv) + \|v\|_{C^2(B_+)}\right).$$

Wie im Beweis von Proposition 4.14 ergibt sich daraus mit $v|_{B(x_0,\varrho)_+} = u|_{B(x_0,\varrho)_+}$

$$\text{höl}_{B(x_0,\varrho),\alpha}(D^2 u) \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right).$$

Da $x_0 \in \overline{B(0,1)_+}$ beliebig war und $\varrho = \varrho(\Lambda, n, \alpha)$, erhalten wir schließlich

$$\text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha} D^2 u \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq \text{höl}_{B(0,1)_+,\alpha}(D^2 u) + C(n)\|u\|_{C^2(B(0,2)_+)} \leq \\ &\leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right). \end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis* von Satz 4.15: Analog zum Beweis von Satz 4.11 setzen wir

$$S := |D^2 u|^{(n/2+2)}_{0,B(0,2)_0} := \sup_{x \in B(0,2)_+} d(x, \partial B(0,2))^{n/2+2} |D^2 u(x)|.$$

Wegen $u \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ gilt $S < \infty$. Für $x_0 \in B(0,2)_+$ setzen wir

$$\varrho := \begin{cases} \frac{1}{8} d(x_0, \partial B(0,2)) \\ \frac{1}{4}(x_0, \partial B(0,2)) \end{cases} \quad \text{und } x_0' := \begin{cases} x_0 & \text{falls } x_{0,n} \geq \frac{1}{4} d(x_0, \partial B(0,2)) \\ x_0 - x_{0,n} e_n & \text{falls } x_{0,n} < \frac{1}{4} d(x_0, \partial B(0,2)). \end{cases}$$

In beiden Fällen gilt $x_0 \in B(x_0', \varrho)_+$, $B(x_0', 2\varrho) \subset B(0,2)$, $d(y, \partial B(0,2)) \geq \varrho$ für alle $y \in B(x_0', 2\varrho)$ und $d(x_0, \partial B(0,2)) \leq 8\varrho$. Außerdem gilt im ersten Fall $B(x_0', 2\varrho) \subset \mathbb{R}^n_+$ und im zweiten Fall $x_0' \in \mathbb{R}^n_0$. Wir reskalieren $\tilde{u}(y) := u(\varrho y)$, für $y \in B(y_0', 2)_+$ mit $y_0' = \varrho^{-1} x_0'$ und erhalten wie in (4.27)

$$Lu(\varrho y) = \varrho^{-2} \tilde{L} \tilde{u}(y) \text{ für } y \in B(y_0', 2)_+$$

mit geeignetem $\tilde{L}$. Sei jetzt $B := B(y_0', 2) = B(\varrho^{-1} x_0', 2)$. Wegen Proposition 3.15 erfüllen folgende Abbildungen die Vorrausetzungen von dem Lemma von Ehrling 3.3:

$$C^2(B_+) \to C^1(B_+) \hookrightarrow L^2(B_+) \text{ und } C^{2,\alpha}(B(y_0', 1)_+) \to C^2(B(y_0', 1)_+) \hookrightarrow L^2(B(y_0', 1)_+).$$

Mit $\|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)} \leq \frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} + C(n)\|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)}$ absorbieren wir wieder wieder $\frac{1}{2}\|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)}$ in der ersten der folgenden Ungleichungen und erhalten für $0 < \epsilon < 1$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)} = \|\tilde{u}\|_{C^1(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} &\leq C(n) \left(\|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)}\right) \\ \|D^2 \tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)} &\leq \epsilon \|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n, \alpha, \epsilon)\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)}. \end{aligned}$$

Mit den Propositionen 4.14 und 4.18 ergibt dies wegen $\varrho \leq 1$ wieder

$$
\begin{aligned}
d(x_0\partial B(0,2))^{n/2+2}|D^2u(x_0)| &\leq (8\varrho)^{n/2+2}\|D^2u\|_{L^\infty(B(x_0',\varrho)_+)} = 8^{n/2+2}\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B(y_0',1)_+)} \\
&\leq \epsilon\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(y_0',1)_+)} + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon\varrho^{n/2}\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B_+)}\right) + C(n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B(y_0',1)_+)} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B_+)} + \epsilon\varrho^{n/2}\|D^2\tilde{u}\|_{L^\infty(B_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\varrho^{n/2}\|\tilde{u}\|_{L^2(B_+)} \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha,\epsilon)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right) + C(\Lambda,n,\alpha)\epsilon S.
\end{aligned}
$$

Das Supremum der linken Seite über $x_0 \in B(0,2)_+$ ergibt für kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,\alpha)$

$$
S \leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,2)_+)}\right).
$$

Wir reskalieren und überdecken $B(0,1)$ durch kleine Bälle. Aus Proposition 4.18 folgt zusammen mit der obigen ersten Interpolationsungleichung auf $B(0,\frac{3}{2})_+$ anstatt B_+

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{C^2(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right) \\
&\leq C(\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|u\|_{L^2(B(0,\frac{3}{2})_+)} + \|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)}\right).
\end{aligned}
$$

Dann folgt die Behauptung aus $\|D^2u\|_{L^\infty(B(0,\frac{3}{2})_+)} \leq 2^{n/2+2}S$. **q.e.d.**

Mit den Propositionen 4.14 und 4.18 beweisen wir schließlich

Globale Schauder Abschätzungen 4.19. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und L (2.3) erfülle (4.25)–(4.26). Dann gilt für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ mit $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$*

$$
\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).
$$

Beweis: Wie oben bemerkt, genügt es, $\varphi = 0$ zu betrachten. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ beliebig. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und einen $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ mit $\Psi(x_0) = 0$ und $\Psi(U(x_0) \cap \Omega) = B(0,2)_+$. Wir definieren $\tilde{u} = u \circ \Psi^{-1} \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$. Wegen $u|_{\partial\Omega} = 0$ gilt $\tilde{u}|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
Lu &= \sum_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum_i b_i\partial_i u + cu = \\
&= \sum_{ijkl} a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l(\partial_k\partial_l\tilde{u})\circ\Psi + \sum_{ik}\left(\sum_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\right)\partial_k\tilde{u}\circ\Psi + c\cdot(\tilde{u}\circ\Psi).
\end{aligned}
$$

Dann erfüllt $\tilde{L}$ mit $\quad \tilde{L}\tilde{u} := (Lu)\circ\Psi^{-1} = \sum_{kl}\tilde{a}_{kl}\partial_k\partial_l\tilde{u} + \sum_k \tilde{b}_k\partial_k\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u} \quad$ und

$$
\tilde{a}_{kl} := \sum_{ij}(a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_j\Psi_l)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{b}_k := \sum_i\Big(\sum_j a_{ij}\partial_i\partial_j\Psi_k + b_i\partial_i\Psi_k\Big)\circ\Psi^{-1} \quad \tilde{c} := c\circ\Psi^{-1}
$$

$$\sum_{kl} \tilde{a}_{kl}(y)\xi_k\xi_l \geq c_0(\Psi,\Lambda,n)|\xi|^2 \quad \text{für alle} \quad y \in B(0,2)_+ \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n$$
$$\max\left\{\|\tilde{a}_{kl}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{b}_k\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}, \|\tilde{c}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)}\right\} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha).$$

Mit $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$ erhalten wir aus Proposition 4.18 $\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0)\cap\Omega)} \leq$

$$\leq C(\Psi,n,\alpha)\|\tilde{u}\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|\tilde{L}\tilde{u}\|_{C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{C^2(B(0,2)_+)}\right)$$
$$\leq C(\Psi,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{4.28}$$

Nun betrachten wir $x_0 \in \Omega$. Dann existiert $\varrho_{x_0} > 0$ mit $B(x_0, 2\varrho_{x_0}) \subset \Omega$ und aus Proposition 4.14 folgt nach Reskalieren von $V(x_0) = B(x_0, \varrho_{x_0})$

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(V(x_0)\cap\Omega)} \leq C(\Lambda,\varrho_{x_0},n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right). \tag{4.29}$$

Die kompakte Menge $\bar{\Omega}$ ist für endlich viele $x_i \in \bar{\Omega}$ in $V(x_1)\cup\ldots\cup V(x_N)$ enthalten. Wie im Lemma 3.16 gilt $\max\{\delta_1,\ldots,\delta_N\} \geq \delta > 0$ für $\delta_i(x) = d(x, \bar{\Omega}\setminus V(x_i)$ und die Supremumsnormen und Hölderkonstanten auf Ω können durch die Hölderkonstanten und die Supremumsnorm auf $V(x_i)\cap\Omega$ abgeschätz werden. Aus (4.28) und (4.29) folgt

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^2(\Omega)}\right).$$

Die Behauptung folgt nun für hinreichend kleine ϵ aus der Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{C^2(\Omega)} \leq \epsilon\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + C(\Omega,\epsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)},$$

die aus dem Lemma von Ehrling 3.3 und der Proposition 3.13 folgt. **q.e.d.**

Aus den globalen Schauder-Abschätzungen ergibt sich zusammen mit der höheren Regularität aus der L^2-Theorie die Lösbarkeit des Dirichletproblems.

Existenz von klassischen Lösungen des Dirichletproblems 4.20. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ und L (2.3) erfülle (4.25)–(4.26) mit $c \leq 0$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ des Dirichletproblems*

$$Lu = f \text{ auf } \Omega \quad \text{mit} \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \quad \text{und diese erfüllt}$$
$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,\alpha)\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}\right). \tag{4.30}$$

Beweis: Wieder genügt es $\varphi = 0$ zu betrachten. Die Eindeutigkeit der Lösung in $C^{2,\alpha}(\Omega)$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.14 mit $c \leq 0$.

Zuerst beweisen wir die Abschätzung (4.30) für $C^{2,\alpha}$-Lösungen des Dirichletproblems. Angenommen (4.30) gilt nicht, dann existieren L_m (2.3), die (4.25)–(4.26) erfüllen mit $c_m \leq 0$, $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $f_m \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit $u_m|_{\partial\Omega} = 0$ und

$$\|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Andererseits folgt aus Satz 4.19 durch absorbieren für $m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)$

$$\begin{aligned}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\left(\|f_m\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right)\\ &< C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\left(\tfrac{1}{m}\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right) < 2C(\Omega, \Lambda, n, \alpha)\|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})}.\end{aligned}$$

Wir nehmen o.B.d.A. $\|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1$ an. Nach Übergang zu einer Teilfolge gilt dann

$$u_m \to u \text{ stark in } C^2(\bar{\Omega}) \qquad L_m \to L \text{ stark in } C^0(\bar{\Omega}) \qquad f_m \to 0 \text{ stark in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Es folgt $Lu = 0$ auf Ω mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Wegen $0 \geq c_m \to c$ folgt aus dem Maximumprinzip Korollar 2.14 $u = 0$ im Wiederspruch zu $\|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leftarrow \|u_m\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 1$. Also gilt (4.30).

Zum Beweis der Existenzaussage wählen wir glatte L_m (2.3) mit $c_m \leq 0$, die (4.25)–(4.26) erfüllen und in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen L konvergieren. Dazu wählen wir glatte beschränkte f_m, die in $C^0(\bar{\Omega})$ gegen f konvergieren. Gibt es Lösungen $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ der entsprechenden Dirichletprobleme, dann sind diese wegen (4.30) beschränkt in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Somit konvergiert eine Teilfolge u_m in $C^2(\bar{\Omega})$ gegen ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $Lu = f$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Also genügt es die Existenz für glatte $L \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ zu beweisen. Solche L können wir mit glatten Koeffizienten in Divergenzform (4.1) schreiben. Wegen $c \leq 0$ erfüllt L die Bedingung (4.6) des Maximumprinzip Satz 4.2, und nach Satz 4.3 existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $L_d u = f$ auf Ω mit $u|_{\partial\Omega} = 0$. Aus $L, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ folgt $u \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $Lu = f$ auf Ω aus Korollar 4.10. Ist darüberhinaus $\partial\Omega \in C^\infty$, so folgt auch $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dann ist u eine klassische Lösung.

Unter den Voraussetzungen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ des Satzes müssen wir $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ zeigen. Bzw., da wir $u \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ schon wissen, dass $u \in C^{2,\alpha}(V(x_0) \cap \Omega)$ für alle $x_0 \in \partial\Omega$ auf einer Umgebung $V(x_0)$ gilt. Wegen $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ können wir $\partial\Omega$ mit dem $C^{2,\alpha}$-Diffeomorphismus $\Psi : U(x_0) \cong B(0,2)$ in einer Umgebung $U(x_0)$ glattbiegen, und $\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{1,2}(B(0,2)_+)$ erfüllt $\tilde{u}|_{B(0,2)_0} = 0$. Setzen wir gemäß (4.15)

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{kl} &:= \sum\nolimits_{ij} (a_{ij}\partial_j\Psi_l\partial_i\Psi_k) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| & \tilde{c} &:= c \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|\\ \tilde{b}_k &:= \sum\nolimits_i \left(\left(b_i - \sum\nolimits_j \partial_j a_{ji}\right)\partial_i\Psi_k\right) \circ \Psi^{-1} \cdot |\det D\Psi^{-1}| & \tilde{f} &:= f \circ \Psi^{-1}|\det D\Psi^{-1}|\\ \tilde{L}_d\tilde{u} &:= \sum\nolimits_{ij} \partial_i(\tilde{a}_{ij}\partial_j\tilde{u}) + \sum\nolimits_i \tilde{b}_i\partial_i\tilde{u} + \tilde{c}\tilde{u}, \quad \tilde{L}_d \in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+), & \tilde{f} &\in C^{1,\alpha}(B(0,2)_+),\end{aligned}$$

so transformiert sich $L_d u = f$ auf $B(0,2)_+$ zu $\tilde{L}_d\tilde{u} = \tilde{f}$. Wir zeigen $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Dafür approximieren wir L bzw. f in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ durch $C^1(B(0,2)_+$ beschränkte Folgen $\tilde{L}_{d,m}, f_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{c}_m \leq 0$. Weiter wählen wir $B(0,\frac{4}{3})_+ \subset \Omega_0 \subset B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und mit Proposition 3.38 $\tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{B(0,2)_+})$ mit $\tilde{\varphi}|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $W^{1,2}(B(0,2)_+)$ stark gegen $\tilde{u}$ konvergieren. Wegen Satz 4.3 existieren schwache Lösungen $\tilde{u}_m \in W^{1,2}(\Omega_0)$ von $\tilde{L}_{d,m}\tilde{u}_m = \tilde{f}$ auf Ω_0 mit $\tilde{u}_m|_{\partial\Omega_0} = \tilde{\varphi}_m|_{\partial\Omega_0}$ und

$$\|\tilde{u}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \leq C \left(\|\tilde{f}\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\tilde{\varphi}_m\|_{W^{1,2}(\Omega_0)} \right)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$. Die rechte Seite bleibt imGrenzwert $m \to \infty$ beschränkt, und somit konvergiert für eine Teilfolge $\tilde{u}_m \to \bar{u}$ schwach in $W^{1,2}(\Omega_0)$. Es folgt, dass $\bar{u}$ eine schwache Lösung von $\tilde{L}_d \bar{u} = \tilde{f}$ auf Ω_0 mit $\bar{u}|_{\partial\Omega_0} = \tilde{u}_{\partial\Omega_0}$ ist, und wegen $\tilde{c} \leq 0$ folgt mit dem Maximumprinzip Satz 4.2 $\bar{u} = \tilde{u}$, also dass $\tilde{u}_m$ in $W^{1,2}(\Omega_0)$ schwach gegen $\tilde{u}$ konvergiert. Aus $\tilde{L}_{d,m}, \tilde{f}_m, \tilde{\varphi}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ folgt mit Korollar 4.10 $\tilde{u}_m \in C^\infty(\overline{\Omega_0})$ und $\tilde{L}_m \tilde{u}_m = \tilde{f}_m$ auf Ω_0, wobei $\tilde{L}_m$ der ausdifferenzierte Nicht-Divergenzform Operator von $\tilde{L}_{d,m}$ ist. Die Koeffizienten von $L_{d,m}$ sind beschränkt in $C^{1,\alpha}(B(0,2)_+)$ und die von $\tilde{L}_m$ in $C^{0,\alpha}(B(0,2)_+)$. Aus Satz 4.15 folgt

$$\|\tilde{u}_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C \left(\|\tilde{f}_m\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|\tilde{u}_m\|_{L^2(B(0,\frac{4}{3})_+)} \right)$$

mit einer von m unabhängigen Konstanten $C < \infty$, da $\tilde{u}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = \tilde{\varphi}_m|_{B(0,\frac{4}{3})_0} = 0$. Aufgrund der Konstruktion bleibt die rechte Seite im Grenzwert $m \to \infty$ beschränkt. Also folgt $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ aus der Konvergenz $\tilde{u}_m \to \tilde{u}$. **q.e.d.**

Schließlich zeigen wir, dass C^2-Lösungen so regulär sind, wie die Daten.

Satz 4.21. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 < \alpha < 1$ und L (2.3) erfülle (4.25) und für $k \geq 0$*

$$\|a_{ij}\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda. \tag{4.31}$$

Für $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ und eine Lösung $u \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω gilt dann für $\Omega' \Subset \Omega$

$$u \in C^{k+2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \tag{4.32}$$

Aus $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$ und $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ mit $\varphi \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$ folgt mit $C = C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k)$

$$u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega) \text{ mit } \|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|\varphi\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right). \tag{4.33}$$

Beweis*: Wir betrachten konzentrische Bälle $B' \Subset B \Subset \Omega$ und wählen $\varphi_m \in C^\infty(\bar{B})$ mit $\varphi_m \to u$ stark in $C^2(\bar{B})$. Mit Satz 4.20 existiert $u_m \in C^{2,\alpha}(B)$ mit

$$L_0 u_m = \sum_{ij} a_{ij} \partial_i \partial_j u_m + \sum_i b_i \partial_i u_m = f - cu =: \tilde{f} \in C^{0,\alpha}(B) \quad u_m|_{\partial B} = \varphi_m|_{\partial B}.$$

Da $L_0(u_m - u) = 0$ in B, folgt mit dem Maximumprinzip Korollar 2.14

$$\|u_m - u\|_{L^\infty(B)} \leq \|u_m - u\|_{L^\infty(\partial B)} \leq \|\varphi_m - u\|_{L^\infty(B)} \to 0,$$

also dass u_m in $C^0(\bar{B})$ stark gegen u konvergiert. Mit Satz 4.11 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B')} \leq C(\Lambda, B, B', n, \alpha, k) \left(\|\tilde{f}\|_{C^{0,\alpha}(B)} + \|u_m\|_{C^0(B)} \right).$$

Wegen der Konvergenz von u_m ist die rechte Seite uniform in m beschränkt. Es folgt $u \in C^{2,\alpha}(B')$, also (4.32) für $k = 0$ aus Satz 4.11.

Nun sei $k \geq 1$ und (4.32) für $0, \ldots, k-1$ bewiesen. Dann folgt $u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Wir wählen $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega$. Für die endliche Differenz $\partial_l^h u$ (3.14), $l = 1, \ldots, n$, $0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt

$$L(\partial_l^h u) = \partial_l^h f - \sum\nolimits_{ij} (\partial_l^h a_{ij}) \partial_i \partial_j \bar{u} - \sum\nolimits_i (\partial_l^h b_i) \partial_i \bar{u} - (\partial_l^h c)\bar{u} =: f_l^h \quad \text{auf } \Omega''. \tag{4.34}$$

Für $v \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ gilt auf $x \in \Omega''$ $\quad \|\partial_l^h v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \|\partial_l v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega''')}$ $\quad$ wegen

$$\partial_l^h v(x) = \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{d}{dt} v(x + the_l)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \partial_l v(x + the_l)\,\mathrm{d}t.$$

Daraus folgt mit (4.31) $\qquad \|f_l^h\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} \leq \|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + C(n)\Lambda\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}$.

Aus (4.32) für $k-1$ und (4.34) folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_l^h u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega')} &\leq C(\Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|\partial_l^h f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega'')} + \|\partial_l^h u\|_{C^0(\bar{\Omega}'')}\right) \\
&\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega''')}\right) \\
&\leq C(\Omega''', \Omega'', \Omega', \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega''')} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})}\right).
\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ in $C^0(\bar{\Omega}')$. Dann folgt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und (4.32).

Im Fall mit Rand können wir $\varphi = 0$ annehmen. Wir biegen den Rand glatt zu $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$. Durch Reskalieren $x \mapsto \varrho x$ transformieren sich die Koeffizienten

$$\tilde{a}_{ij}(x) := a_{ij}(\varrho x) \qquad \tilde{b}_i(x) := \varrho b_i(\varrho x) \qquad \tilde{c}(x) := \varrho^2 c(\varrho x) \qquad \tilde{f}(x) := \varrho^2 f(\varrho x)$$

von L und f. Daher können wir annehmen, dass L (2.3) die Voraussetzung (4.25) mit Λ ersetzt durch geeignetes Λ_0 erfüllt und $\|c\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \leq \epsilon$ für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ gilt, das wir erst später festlegen. Weiter sei $B(0, \frac{4}{3})_+ \subset \Omega_0 \subset B(0, \frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und φ_m eine Folge in $C^{2,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\varphi_m|_{B(0,2)_0} = 0$, die in $C^0(\overline{B(0,2)_+})$ stark gegen u konvergiert. Wir suchen dazu Lösungen $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ von $Lu_m = f$ auf Ω_0 mit $u_m|_{\partial\Omega_0} = \varphi_m|_{\partial\Omega_0}$. Wir betrachten die stetigen linearen Abbildungen $L, L_0 : C^{2,\alpha,0}(\Omega_0) := \{v \in C^{2,\alpha}(\Omega_0) \mid v = 0 \text{ auf } \partial\Omega_0\} \to C^{0,\alpha}(\Omega_0)$. Mit dem Satz 4.20 ist L_0 ein Isomorphismus, und $L - L_0$ ist kompakt. Wählen wir $\epsilon > 0$ so klein, dass $c_0 := 1 - C(\Omega_0, \Lambda_0)\epsilon > 0$ in Korollar 2.20 gilt, so folgt mit Korollar 2.20, dass L injektiv ist und mit Lemma 3.4, dass L ein Isomorphismus ist. Damit existiert $u_m - \varphi_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ mit $L(u_m - \varphi_m) = f$ und $u_m - \varphi_m = 0$ auf $\partial\Omega_0$, also sind $u_m \in C^{2,\alpha}(\Omega_0)$ solche Lösungen. Mit Hopfs Maximumprinzip 2.17 folgt wegen $c_0 := 1 - C(\Omega_0(\Lambda_0)\epsilon > 0$,

$$\|u_m - u\|_{C^0(\overline{\Omega_0})} \leq c_0^{-1}\|u_m - u\|_{C^0(\partial\Omega_0)} \leq c_0^{-1}\|\varphi_m - u\|_{C^0(\overline{B(0,2)_+})} \to 0.$$

Also konvergiert u_m in $C^0(\overline{\Omega_0})$ stark gegen u. Mit Satz 4.15 folgt

$$\|u_m\|_{C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda, n, \alpha) \left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(B(0,\frac{4}{3})_+)} + \|u_m\|_{C^0(B(0,\frac{4}{3})_+)} \right).$$

Wegen der Konvergenz von u_m ist die rechte Seite beschränkt und $u \in C^{2,\alpha}(B(0,1)_+)$. Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt (4.33) für $k = 0$ aus Satz 4.19.

Nun sei $k \geq 1$ und (4.33) für $0, \ldots, k-1$ bewiesen. Daher gilt $u \in C^{k+2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right). \quad (4.35)$$

Weiter gilt $\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(B(0,2)_+) \cap C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)$ mit $\partial_l u|_{B(0,2)_0} = 0$ für $l = 1, \ldots, n-1$ wegen $u|_{B(0,2)_0} = 0$. Wir wählen $\eta \in C^\infty_0(B(0,\frac{4}{3})), \eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$ und erhalten

$$\text{für} \qquad v := \eta\partial_l u \in C^{k+1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega_0) \cap C^{k,\alpha}(\Omega_0) \qquad \text{und} \quad v|_{\partial\Omega_0} = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j v &= \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j(\eta\partial_l u) = \\
&= \sum\nolimits_{ij} (\eta a_i\partial_i\partial_j\partial_l u + a_{ij}(\partial_i\eta\partial_j\partial_l u + \partial_j\eta\partial_i\partial_l u) + a_{ij}\partial_l u\partial_i\partial_j\eta) = \\
&=: \sum\nolimits_{ij} \eta a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u + R_l \qquad \text{mit} \qquad \|R_l\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq C(\Lambda, n, \alpha, k)\|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right)$$

wobei wir (4.35) verwendet haben. Aus $Lu = f$ folgt auf $B(0,2)_+$ wieder mit (4.35)

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\partial_j\partial_l u &= \sum\nolimits_{ij} (\partial_l(a_{ij}\partial_i\partial_j u) - (\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u) \\
&= \partial_l \left(f - \sum\nolimits_i b_i\partial_i u - cu \right) - \sum\nolimits_{ij} (\partial_l a_{ij})\partial_i\partial_j u =: \hat{f} \\
\|\hat{f}\|_{C^{k-1,\alpha}(B(0,2)_+)} &\leq C(\Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,2)_+)} \right) \\
&\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right).
\end{aligned}$$

Wenden wir (4.33) für $k-1$ auf v in Ω_0 an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\partial_l u\|_{C^{k+1,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq \|v\|_{C^{k+1,\alpha}(\Omega_0)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|a_{ij}\partial_i\partial_j v\|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega_0)} + \|v\|_{C^0(\bar{\Omega}_0)} \right) \\
&\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right).
\end{aligned}$$

Da $l = 1, \ldots, n-1$ und $u \in C^{k+2,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ folgt wegen $Lu = f$, (4.25) und (4.35)

$$\begin{aligned}
\|\partial_i\partial_j u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \qquad \text{für } i,j \neq (n,n) \\
\partial_n^2 u &= a_{nn}^{-1} \left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n.n)} a_{ij}\partial_i\partial_j u - \sum\nolimits_{i=1}^n b_i\partial_i u - cu + f \right) \qquad \text{auf } B(0,2)_+ \\
\|\partial_n^2 u\|_{C^{k,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \\
\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, \alpha, k) \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right).
\end{aligned}$$

Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt mit (4.32) auch (4.33). **q.e.d.**

4.3* Calderon-Zygmundabschätzungen

Wir betrachten wieder elliptische Differentialoperatoren in Nicht-Divergenzform (2.3) auf offenen Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für $u \in W^{2,1}(\Omega)$ mit meßbaren Koeffizienten

$$a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R} \quad a_{ij}(x) \text{ symmetrisch und positiv definit fast überall auf } \Omega \tag{4.36}$$

$$\mathcal{D} := \det a_{ij} > 0 \qquad\qquad \mathcal{D}^* := \mathcal{D}^{\frac{1}{n}}. \tag{4.37}$$

Für meßbares f heißt $u \in W^{2,1}(\Omega)$ eine starke Lösung von $Lu \geq (\leq) f$ auf Ω, falls diese Ungleichung nach Einsetzen der schwachen Ableitungen fast überall in Ω erfüllt ist. Wir beginnen mit einem weiteren Maximumprinzip. Dabei benutzen wir die sogenannte obere Kontaktmenge einer auf Ω definierten Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$:

$$\Gamma_v^+ := \Gamma_v^+(\Omega) := \{x \in \Omega \mid \exists b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } v(y) \leq v(x) + b \cdot (y - x) \quad \forall y \in \Omega\}$$

Diese Menge besteht aus allen $x \in \Omega$, so dass $\{(y, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid v(y) \leq z\}$ in $(x, v(x))$ eine ganze Hyperebene von $\mathbb{R}^{n+1}$ enthält, d.h. v unterhalb einer Hyperebene verläuft. Wenn v in $x \in \Gamma_v^+$ zweimal differenzierbar ist, dann folgt $b = \nabla v(x)$ und $D^2 v(x) \leq 0$.

Alexandroff'sches Maximumprinzip 4.22. *Sei L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der* (4.36)-(4.37) *auf $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt. Weiter sei*

$$\|b/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Omega)} \leq \Lambda, \qquad\qquad c \leq 0. \tag{4.38}$$

Für $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $Lu \geq f$ fast überall in $\Omega \cap [u > 0]$ und $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ gilt

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega \|f_-/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0])}. \tag{4.39}$$

Zuerst geben wir eine nützliche Stetigkeitseigenschaft der Kontaktmenge an.

Proposition 4.23. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit offener Überdeckung $\Omega = \bigcup_{m=1}^\infty \Omega_m$ mit $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}, u_m : \Omega_m \to \mathbb{R}, u_m \to u$ punktweise in Ω. Dann gilt*

$$\limsup_{m \to \infty} \chi_{\Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)} \leq \chi_{\Gamma^+_u(\Omega)}. \tag{4.40}$$

Beweis: Sei $x \in \Gamma^+_{u_m}(\Omega_m)$ für eine Teilfolge $m \to \infty$ und ein $b_m \in \mathbb{R}^n$ mit

$$u_m(y) \leq u_m(x) + b_m \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega_m.$$

Ein Ball $B(x, 2\varrho_x) \Subset \Omega$ liegt für große m in Ω_m. Falls b_m für eine Teilfolge divergiert, so konvergiert für eine weitere Teilfolge $b_m/|b_m| \to \nu \in \partial B(0, 1)$, insbesondere $(b_m/|b_m|)\nu \to |\nu|^2 = 1$, und $b_m \cdot \nu \to \infty$. Für $y = x - \varrho_x \nu \in B(x, \varrho_x) \subset \Omega_m$ folgt

$$-\infty < u(y) \leftarrow u_m(y) \leq u_m(x) + b_m \cdot (y - x) = u_m(x) - \varrho b_m \cdot \nu \to -\infty,$$

also ein Widerspruch. Daher konvergiert für eine Teilfolge $b_m \to b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$u(y) \le u(x) + b \cdot (y - x) \text{ für alle } y \in \Omega,$$

also $x \in \Gamma_u^+(\Omega)$, und (4.40) folgt. **q.e.d.**

Den Beweis des Alexandroff'schen Maximumprinzips beginnen wir mit

Proposition 4.24. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $u \le 0$ auf $\partial\Omega$ gilt*

$$\sup_\Omega u \le \frac{\operatorname{diam}\Omega}{\sqrt[n]{\omega_n}} \left(\int_{\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0]} |\det D^2 u| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis: Wegen dem Satz von Sard[5] wird $[\det D^2 u = 0]$ durch ∇u auf eine Nullmenge abgebildet. Wegen dem Satz der inversen Funktion ist ∇u auf der offenen Teilmenge $[|\det D^2 u| > 0]$ lokal bijektiv. Dann folgt aus Jacobi's Transformation von Maßen

$$\mu(\nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0])) \le \int_{\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0]} |\det D^2 u| \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.41}$$

Wir können $M := \sup_\Omega u > 0$ annehmen, also $M = u(x_0)$ für ein $x_0 \in \Omega$. Sei

$$l(y) := u(x_0) + b \cdot (y - x_0) = u_+(x_0) + b \cdot (y - x_0).$$

Für $0 < |b| < M/\operatorname{diam}\Omega$ gilt dann $l > 0 = u_+$ auf $\partial\Omega$. Dann gibt es ein $x \in \Omega$ mit

$$\sup_{\partial\Omega}(u_+ - l) < 0 = (u_+ - l)(x_0) \le \sup_\Omega (u_+ - l) = (u_+ - l)(x)$$

Daraus folgt $u_+(x) - b \cdot x \ge u_+(y) - b \cdot y$ für alle $y \in \Omega$, also $x \in \Gamma^+_{u_+}$. Für $u(x) > 0$ ist u_+ bei x differenzierbar mit $b = \nabla u_+(x) = \nabla u(x)$. Weil $y := x - tb$ für ein $t > 0$ in $\partial\Omega$ liegt, folgt $u_+(x) \ge u_+(y) + b \cdot (x - y) = tb^2 > 0$, also $u(x) = u_+(x) > 0$. Dann folgt

$$B(0, M/\operatorname{diam}\Omega) \setminus \{0\} \subset \nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]) \tag{4.42}$$

und die Proposition aus $\omega_n \left(\frac{M}{\operatorname{diam}\Omega} \right)^n \le \mu(\nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]))$ und (4.41). **q.e.d.**

Proposition 4.25. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, einen Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der* (4.36) *und* (4.37) *auf Ω erfüllt und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $u \le 0$ auf $\partial\Omega$ gilt*

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam}\Omega}{n\sqrt[n]{\omega_n}} \left\| \frac{\sum_{ij} a_{ij} \partial_j \partial_i u}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+} \cap [u>0])}$$

[5]John W. Milnore: "Topology from the Differentiable Viewpoint" Kapitel 2.

Beweis: Für symmetrische Matrizen $A, B \geq 0$ und die positive Wurzel S von B, d.h.

$$S \geq 0 \quad \text{symmetrisch mit} \qquad B = S^2$$

gilt mit der Ungleichung zwischen geometrischen and arithmetischen Mittelwerten

$$\det A \cdot \det B = \det S^T AS \leq \left(\frac{tr(S^T AS)}{n}\right)^n = \left(\frac{tr(AB)}{n}\right)^n.$$

Mit $A = (a_{ij}) \geq 0$ und $-B = D^2 u \leq 0$ folgt die Porposition mit Proposition 4.24 aus

$$|\det D^2 u| \leq \mathcal{D}^{-1}\left(\frac{-\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n}\right)^n \quad \text{auf } \Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0] \subset \Gamma^+_u. \qquad \textbf{q.e.d.} \quad (4.43)$$

Beweis von Satz 4.22: Sei zuerst $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Es genügt $\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u_+$ zu betrachten. Für $\mu > 0$ gilt auf $\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0] \subset \Gamma^+_u$ mit der Hölderungleichung

$$0 \leq -\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u \leq \sum_i b_i\partial_i u + cu - f \leq |b||\nabla u| + f_- \leq \|(|b|, \tfrac{f_-}{\mu})\|_n \|(|\nabla u|, \mu)\|_{\frac{n}{n-1}}$$

$$\text{mit} \quad \|(a,b)\|_q := \begin{cases} (|a|^q + |b|^q)^{1/q} & \text{für } 1 \leq q < \infty, \\ \max\{|a|, |b|\} & \text{für } q = \infty. \end{cases}$$

Damit erhalten wir auf $\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]$

$$-g^{\frac{1}{n}}(\nabla u)\frac{\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n\mathcal{D}^*} \leq \frac{(|b|^n + \mu^{-n} f_-^n)^{\frac{1}{n}}}{n\mathcal{D}^*} \qquad \text{mit} \quad g(p) := \|(p,\mu)\|^{-n}_{\frac{n}{n-1}}.$$

Für $\tilde{M} := (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+) > 0$, folgt wie in (4.42) die Relation

$$B(0, \tilde{M}) \setminus \{0\} \subset \nabla u(\Gamma^+_{u_+} \cap [u > 0]).$$

Wir benutzen jetzt dass $x \mapsto x^{\frac{1}{n-1}}$ auf $(0, \infty)$ konkav ist und schätzen ab:

$$\frac{|p|^{\frac{n}{n-1}} + |\mu|^{\frac{n}{n-1}}}{2} \leq \left(\frac{|p|^n + |\mu|^n}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|p|^n + |\mu|^n} \leq 2^{n-2} g(p).$$

$$\ln\left(\frac{\tilde{M}^n}{\mu^n} + 1\right) = n\int_0^{\tilde{M}} \frac{r^{n-1}}{r^n + \mu^n}\,\mathrm{d}r \leq \frac{2^{n-2}}{\omega_n}\int_{B(0,\tilde{M})} g \quad (\text{wegen } 2^{n-2}g(p) \geq \tfrac{1}{|p|^n + |\mu|^n})$$

$$\leq \frac{2^{n-2}}{\omega_n}\int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} g(\nabla u) \cdot |\det D^2 u| \text{ (Satz von Sard und Jacobis Transformation)}$$

$$\leq \frac{2^{n-2}}{\omega_n}\int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} g(\nabla u)\left(\frac{-\sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i u}{n\mathcal{D}^*}\right)^n \leq \frac{2^{n-2}}{n^n\omega_n}\int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} \frac{|b|^n + \mu^{-n} f_-^n}{\mathcal{D}}$$

mit (4.43). Im Grenzwert $\mu \downarrow \|f_-/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}$ erhalten wir durch Exponenzieren

$$\tilde{M} \leq \left(\exp\left(\frac{2^{n-2}}{n^n \omega_n} \left(1 + \int_{\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0]} \frac{|b|^n}{\mathcal{D}} \right)\right) - 1 \right)^{\frac{1}{n}} \left\| \frac{f_-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}.$$

Da $\tilde{M} = (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}(\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u_+)$ folgt (4.39) für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Im allgemeine Fall $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \Omega^0(\bar{\Omega})$ nehmen wir zuerst folgendes an:

$$\|a_{ij}/\mathcal{D}^*\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \qquad \|b_i/\mathcal{D}^*\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{4.44}$$

Wir wählen $u_m \in C^2(\Omega)$ mit $u_m \to u$ stark in $W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d.h. $u_m \to u$ stark in $W^{2,n}(\Omega')$ und $u_m \to u$ stark in $C^0(\bar{\Omega}')$ für $\Omega' \Subset \Omega$. Indem wir u_m durch $u_m - \|u_m - u\|_{L^\infty(\Omega')}$ ersetzen können wir o.B.d.A. $u_m \leq u$ auf Ω' annehmen. Dann folgt

$$\begin{aligned} Lu_m &= Lu + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u_m - u) + c(u_m - u) \\ &\geq f_- + \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i b_i\partial_i(u_m - u), \end{aligned}$$

da $c \leq 0$. Dann folgt mit (4.39), (4.44) und $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ für $u_m \in C^2(\bar{\Omega}')$

$$\begin{aligned} &\sup_{\Omega'} u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega'} u_m \leq \limsup_{m\to\infty} \sup_{\partial\Omega'} u_{m,+} + C(\Lambda, n)\operatorname{diam}\Omega' \cdot \\ &\limsup_{m\to\infty} \left(\left\| \frac{f_-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_{m,+}}\cap[u_m>0])} + \left\| \sum\nolimits_{ij} \frac{a_{ij}}{\mathcal{D}^*}\partial_j\partial_i(u_m - u) + \sum\nolimits_i \frac{b_i}{\mathcal{D}^*}\partial_i(u_m - u) \right\|_{L^n(\Omega')} \right) \\ &\qquad \leq \sup_{\partial\Omega'} u_+ + C(\Lambda, n)\operatorname{diam}\Omega' \|(f_-/\mathcal{D}^*) \limsup_{m\to\infty} \chi_{(\Gamma^+_{u_{m,+}}\cap[u_m>0])}\|_{L^n(\Omega')}, \end{aligned}$$

mit Kontaktmengen $\Gamma^+_{u_{m,+}} = \Gamma^+_{u_{m,+}}(\Omega')$. Aus $u_m \leq u$ folgt $[u_m > 0] \cap \Omega' \subset [u > 0]$ und

$$\limsup_{m\to\infty} \chi_{(\Gamma^+_{u_{m,+}}\cap[u_m>0])} \leq \chi_{(\Gamma^+_{u_+}\cap[u>0])}.$$

aus (4.40). Dies ergibt (4.39) für u auf $\Omega' \Subset \Omega$ unter der Annahme (4.44).

Für L mit $b_i/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ definieren wir und folgern daraus im Grenzwert $\epsilon \downarrow 0$

$$\begin{aligned} &L_\epsilon := L + \epsilon(\sigma_n + |b|)\Delta \quad \text{mit} \qquad \operatorname{spec}(a_{ij}) = \{0 < \sigma_1 \leq \ldots \leq \sigma_n < \infty\} \\ &a^\epsilon_{ij} = a_{ij} + \epsilon(\sigma_n + |b|)\delta_{ij} \quad \text{mit} \qquad \operatorname{spec}(a^\epsilon_{ij}) = \{\sigma_l + \epsilon(\sigma_n + |b|) \mid l = 1, \ldots, n\} \\ &\mathcal{D}^* \leq \mathcal{D}^*_\epsilon \quad \text{und} \qquad \epsilon(\sigma_n + |b|)\mathbb{1} \leq (a^\epsilon_{ij}) \leq ((1+\epsilon)\sigma_n + \epsilon|b|)\mathbb{1}. \\ &\left(\frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon} \right)^n \leq \frac{\epsilon^n(\sigma_n + |b|)^n}{\epsilon^{n-1}(\sigma_n + |b|)^{n-1}(\sigma_n + \epsilon(\sigma_n + |b|))} = \frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\sigma_n + \epsilon(\sigma_n + |b|)}, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad 1 \geq \frac{\epsilon(\sigma_n + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon} \to 0 \quad \text{fast überall auf } \Omega. \tag{4.45}$$

Also erfüllt L_ϵ (4.44). Aus (4.39) für $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ und L_ϵ folgt mit $\mathcal{D}^* \leq \mathcal{D}^*_\epsilon$

$$\sup_{\Omega'} u \leq \sup_{\partial\Omega'} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega' \left(\left\| \frac{f_-}{\mathcal{D}^*} \right\|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega') \cap [u>0])} + \left\| \frac{\epsilon(\sigma + |b|)}{\mathcal{D}^*_\epsilon} \Delta u \right\|_{L^n(\Omega')} \right).$$

Der letzte Term konvergiert für $\epsilon \to 0$ mit dem Satz von Lebesgue, $\Delta u \in L^n(\Omega')$ und (4.45) gegen 0. Für $\Omega' \Subset \Omega$ folgt (4.39). Schließlich wählen wir $\Omega_m \subset \Omega_{m+1} \Subset \Omega$ mit $\Omega = \cup_{m=1}^\infty \Omega_m$ und erhalten (4.39) auf Ω wegen $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $f/\mathcal{D}^* \in L^n(\Omega)$ und (4.40)

$$\begin{aligned} \sup_\Omega u = \lim_{m\to\infty} \sup_{\Omega_m} u &\leq \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{\partial\Omega_m} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega_m \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega_m) \cap [u>0])} \right) \\ &\leq \sup_{\partial\Omega} u_+ + C(\Lambda, n) \operatorname{diam} \Omega \| f_-/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma^+_{u_+}(\Omega) \cap [u>0])}. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Aus dem Alexandroff'schen Maximumprinzip folgt folgender Eindeutigkeitssatz.

Satz 4.26. *Für einen elliptischen Differentialoperator L (2.3) in Nicht-Differgenzform, der (4.36)-(4.38) auf $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen erfüllt, f meßbar in Ω und $\varphi \in C^0(\bar{\Omega})$, hat $Lu = f$ auf Ω und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ höchstens eine starke Lösung $u \in W^{2,n}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.* **q.e.d.**

Beispiel 4.27. *Satz 4.26 bleibt nicht richtig für starke Lösungen in $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für $p < n$, wie folgendes Beispiel zeigt. Für $0 < \lambda < 1$ und $n \geq 2$ hat das Dirichletproblem*

$$\Delta u + \left(\tfrac{n-1}{1-\lambda} - 1\right) \sum_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2} \partial_j \partial_i u = 0 \text{ in } B(0,1) \qquad u = 0 \text{ auf } \partial B(0,1)$$

die Lösungen $u(x) \equiv 0$ und $v(x) = 1 - |x|^\lambda$. Für $p < \frac{n}{2-\lambda}$ gilt $v \in W^{2,p}(B(0,1))$. Approximieren wir v durch $v_m \in C^\infty(\overline{B(0,1)})$ mit $v_m \to v$ in $W^{2,p}(B(0,1))$ wie in Proposition 3.33, so folgt $W^{2,p}(B(0,1)) \hookrightarrow C^0(\overline{B(0,1)})$ für $p > n/2$ aus Satz 3.49

$$v_m(0) \to v(0) = 1, \qquad \sup_{\partial B(0,1)} v_m \to \sup_{\partial B(0,1)} v = 0, \qquad a_{ij}\partial_j\partial_i v_m \to a_{ij}\partial_j\partial_i v = 0$$

stark in $L^p(B(0,1))$ mit $a_{ij}(x) := \delta_{ij} + (\frac{n-1}{1-\lambda} - 1)x_1 x_j/|x|^2$ Dies zeigt, dass (4.39) für $p < n$ selbst für $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ im allgemeinen nicht gilt.

Schließlich erhalten wir folgendes starke Maximumprinzip.

Satz 4.28. *Sei L ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3) auf offenem und zusammenhängendem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $1 \leq \Lambda < \infty$ mit*

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda \tag{4.46}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \Lambda^{-1}|\xi|^2 \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.47}$$

Weiter sei $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ *eine Lösung von* $Lu \geq 0$ *auf* Ω *mit* $c \leq 0$ *bzw.* $c = 0$*. Nimmt* u *ein inneres nichtnegatives bzw. beliebiges Maximum auf* Ω *an, so ist* u *konstant.*

Beweis: Für $u \in C^2(\Omega)$ folgen wir dem Beweis des Hopf'schen Maximumprinzip 2.17, wobei wir das Alexandroff'sche Maximumprinzip 4.22 anstatt Korollar 2.14 verwenden.

Nehmen wir an, dass der Satz für $u \in W^{2,n}\,\text{loc}(\Omega)$ falsch ist. Aus dem Satz von Morrey 3.49 folgt $u \in C(\Omega)$, und u nimmt sein Maximum $M = \sup_\Omega u$ in Ω an, ohne konstant zu sein. O.B.d.A. existieren konzentrische Bälle $B(0,\varrho) \Subset B(0,R) \Subset \Omega$ mit

$$u < M \text{ auf } \overline{B(0,\varrho)}, \qquad u(x_0) = M \text{ für ein } x_0 \in B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}.$$

Für $\alpha > 0$ setzen wir $v(x) := e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha R^2}$. Wir rechnen, da $c \leq 0$ und mit (4.47),

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha|x|^2}\Big(4\alpha^2 \sum\nolimits_{ij} a_{ij}x_ix_j - 2\alpha \sum\nolimits_i (a_{ii} + b_ix_i)\Big) + cv \\ &\geq e^{-\alpha|x|^2}\Big(4\alpha^2\Lambda^{-1}|x|^2 - 2\alpha\Big(\sum\nolimits_i a_{ii} + |b||x|\Big) + c\Big) \geq 0 \text{ auf } B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)} \end{aligned}$$

für groß genuge α, da $a_{ii}, b, c \in L^\infty(\Omega)$. Da $c \leq 0$ und $M \geq 0$ oder $c = 0$, gilt $L(M - u - \epsilon v) \leq 0$ auf $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)}$ für $\epsilon > 0$. Auf $\partial B(0,R)$ gilt $M - u \geq 0$, und $v = 0$. Weiter gilt $\inf_{\partial B(0,\varrho)}(M - u) > 0$, also $M - u - \epsilon v > 0$ auf $\partial B(0,\varrho)$ für kleine ϵ.

Aus dem Alexandroff'schen Maximumprinzip 4.22, folgt $M - u - \epsilon v \geq 0$ auf $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varrho)} \ni x_0$ im Wiederspruch zu $(M - u - \epsilon v)(x_0) = -\epsilon v(x_0) < 0$. **q.e.d.**

Wir bereiten jetzt die Calderon-Zygmundabschätzungen vor. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, und es gelte der Divergenzsatz für Ω. Für $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt die erste Green'sche Formel.

$$\int_\Omega \nabla \cdot (v\nabla u) = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla v \nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Durch Antisymmetrisieren von u und v erhält man die zweite Green'sche Formel

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot N \,\mathrm{d}\sigma.$$

Die Laplacegleichung hat auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die radial symmetrische Lösung r^{2-n} für $n \geq 3$ und $\ln r$ für $n = 2$. Durch Normierung erhalten wir die Fundamentallösung von Δ:

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & \text{für } n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{für } n = 2. \end{cases} \tag{4.48}$$

Der Name begründet sich mit folgenden Rechnungen. Für $x \neq 0$ und $k \geq 1$ gilt

$$\nabla\Gamma(x) = \frac{x}{n\omega_n|x|^n} \qquad \partial_i\partial_j\Gamma(x) = \frac{\delta_{ij}|x|^2 - nx_ix_j}{n\omega_n|x|^{n+2}} \qquad |D^k\Gamma(x)| \leq \frac{C_{n,k}}{|x|^{n+k-2}}. \tag{4.49}$$

Für $x \in \Omega$ und $v(y) := \Gamma(y-x)$ können wir die zweite Green'sche Formel nicht auf Ω anwenden, da v bei x singulär ist. Stattdessen wenden wir sie auf $\Omega \setminus \overline{B(x,\varrho)}$ an:

$$\int_{\Omega\setminus B(x,\varrho)} \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma - \int_{\partial B(x,\varrho)} (v\nabla u - u\nabla v)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma.$$

Im Grenzwert $\varrho \to 0$ erhalten wir für $x \in \Omega$ die Green'sche Darstellungsformel

$$\left|\int_{\partial B(x,\varrho)} v\nabla u\cdot N\,\mathrm{d}\sigma\right| = \left|\Gamma(\varrho)\int_{\partial B(x,\varrho)} \nabla u\cdot N\,\mathrm{d}\sigma\right| \le n\omega_n\varrho^{n-1}\Gamma(\varrho)\sup_{B(x,\varrho)}|\nabla u| \to 0$$

$$\int_{\partial B(x,\varrho)} u\nabla v\cdot N\,\mathrm{d}\sigma = \Gamma'(\varrho)\int_{\partial B(x,\varrho)} u\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n\omega_n\varrho^{n-1}}\int_{\partial B(x,\varrho)} u\,\mathrm{d}\sigma \to u(x)$$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (u(y)\nabla\Gamma(y-x) - \Gamma(y-x)\nabla u(y))\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y) + \int_{\Omega} \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y. \quad (4.50)$$

Lemma 4.29. *Für $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{diam}\Omega \le d$, $1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty$ und $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ ist das Newtonpotenial eine stetige lineare Abbildung*

$$N : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega), \quad (Nf)(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \quad \textit{mit} \quad \|N\| \le C(d,n,p,q).$$

Für $f \in C^1_0(\Omega)$ gilt außerdem $Nf \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta Nf = f$ auf Ω.

Beweis: Für $x \in \Omega, \operatorname{diam}\Omega \le d$, $n \ge 2$ und für $1 \le r < \frac{n}{n-2}$ bzw. $1 \le r < \infty$ gilt

$$\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \le C_{n,r}\int_{B(0,d)} |y|^{r(2-n)}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \le C(d,n,r) < \infty \qquad \text{für } n \ge 3$$

$$\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \le (2\pi)^{-r}\int_{B(0,d)} (\ln|y|)^r\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \le C(d,r) < \infty \qquad \text{für } n = 2.$$

Für $p > \frac{n}{2}$ folgt $|Nf(x)| \le \|\Gamma(x-.)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)} \le C(d,n,p)\|f\|_{L^p(\Omega)}$ und $N : L^p(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ ist stetig mit $\|N\| \le C(d,n,p)$. Nun sei $1 \le p \le \frac{n}{2}$, $p \le q < \infty$ und $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$. Für $\frac{1}{q} =: \frac{1}{p} - (1 - \frac{1}{r})$, also $0 \le 1 - \frac{1}{r} < \frac{2}{n}$ und $1 \le r < \frac{n}{n-2}$ folgt

$$\|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)} \le C(d,n,r) = C(d,n,p,q) \qquad \text{für } x \in \Omega.$$

Mit $\frac{p-1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{r-1}{r} = 1$, $r\frac{p-1}{p} + \frac{r}{q} = 1$ und $\frac{p}{q} + p\frac{r-1}{r} = 1$ folgt aus der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}|Nf(x)| &\le \int_\Omega |\Gamma(x-y)|^{r\frac{p-1}{p}}|\Gamma(x-y)|^{\frac{r}{q}}|f(y)|^{\frac{p}{q}}|f(y)|^{p\frac{r-1}{r}}\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y \\ &\le \|\Gamma^{r\frac{p-1}{p}}(x-.)\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}\left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r|f(y)|^p\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y\right)^{\frac{1}{q}}\|f^{p\frac{r-1}{r}}\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)} \\ &= \|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |\Gamma(x-y)|^r|f(y)|^p\,\mathrm{d}^{\mathrm{n}}y\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{p\frac{r-1}{r}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Nf\|_{L^q(\Omega)} &\leq \sup_{x\in\Omega}\|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega\int_\Omega|\Gamma(x-y)|^r|f(y)|^p\,\mathrm{d}^ny\,\mathrm{d}^nx\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{p\frac{r-1}{r}}\\ &= \sup_{x\in\Omega}\|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega\int_\Omega|\Gamma(x-y)|^r|f(y)|^p\,\mathrm{d}^nx\,\mathrm{d}^ny\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{p\frac{r-1}{r}}\\ &\leq \sup_{x\in\Omega}\|\Gamma(x-.)\|_{L^r(\Omega)}^{r\frac{p-1}{p}+\frac{r}{q}}\|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}+p\frac{r-1}{r}}\leq C(d,n,p,q)\|f\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Für $f\in C^1_0(\Omega)\subset C^1_0(\mathbb{R}^n)$ folgt $Nf\in C^2(\Omega)$ mit $\nabla\Gamma=\frac{x}{n\omega_n|x|^n}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ aus

$$\begin{aligned}\nabla Nf(x) &= \int_\Omega\nabla\Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^ny=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\Gamma(z)f(x-z)\,\mathrm{d}^nz && z=x-y\\ \partial_i\nabla Nf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\nabla\Gamma(z)\partial_if(x-z)\,\mathrm{d}^nz=\int_\Omega\nabla\Gamma(x-y)\partial_if(y)\,\mathrm{d}^ny && y=x-z.\end{aligned}$$

Wir wählen $\operatorname{supp} f\subset\Omega'\Subset\Omega$ mit $\partial\Omega'\in C^{0,1}$. Für $\varrho\downarrow 0$ konvergiert $\|\nabla\Gamma\|_{L^1(B(0,\varrho))}\to 0$. Aus $\Delta\Gamma=0$ auf $\Omega\setminus\{x\}$ und dem Divergenzsatz folgt wie im Beweis von (4.50)

$$\begin{aligned}\Delta Nf(x) &= \int_{\Omega'}\nabla\Gamma(x-y)\cdot\nabla f(y)\,\mathrm{d}^ny=\lim_{\varrho\downarrow 0}\int_{\Omega'\setminus B(x,\varrho)}\nabla\Gamma(x-y)\cdot\nabla f(y)\,\mathrm{d}^ny\\ &= -\lim_{\varrho\downarrow 0}\int_{\partial B(x,\varrho)}\nabla\Gamma(x-y)f(y)\cdot N\,\mathrm{d}\sigma(y)=f(x).\end{aligned}$$ **q.e.d.**

Wir kommen zu den Calderon-Zygmundabschätzungen, die für $1<p<\infty$ die $W^{2,p}$-Norm einer starken Lösung von $Lu=f$ durch die L^p-Norm von f und schwächerem Normen von u abschätzt. Wieder betrachten wir zuerst Δ auf dem $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.30. *Für $1<p<\infty$ und $u\in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|D^2u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C(n,p)\|\Delta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.*

Beweis: $n=1$ ist trivial. Für $u\in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit Proposition 3.24 eine Folge $u_m\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u_m\to u$ stark in $W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Gilt die Abschätzung für u_m, so folgt sie für u. Also genügt es $u\in C_0^\infty(\mathbb{R})^n$ zu betrachten. Wegen der Green'schen Darstellungsformel (4.50) ist $u=N\Delta u$ das Newtonpotenial seines Laplace, und die Abschätzung folgt aus der folgenden Calderon-Zygmundungleichung für das Newtonpotential.**q.e.d.**

Spezialfall der Calderon-Zygmundungleichung 4.31. *Es sei $\Omega\Subset\mathbb{R}^n$ offen, $n\geq 2$ und $1<p<\infty$. Dann erfüllt für $f\in L^p(\Omega)$ das Newtonpotential $Nf\in W^{2,p}(\Omega)$ mit*

$$\|D^2(Nf)\|_{L^p(\Omega)}\leq C(n,p)\|f\|_{L^p(\Omega)}\qquad\textit{mit } (Nf)(x):=\int_\Omega\Gamma(x-y)f(y)\,\mathrm{d}^ny.\tag{4.51}$$

Beweis: Sei zuerst $p = 2$. Für $f \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $u := Nf \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und mit Lemma 4.29 gilt $\Delta u = f$. Für $R > R_0$ mit $\Omega \subset B(0, R_0)$, gilt mit dem Divergenzsatz

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} |D^2 u|^2 &= \int_{B(0,R)} \sum\nolimits_{i,j} |\partial_j \partial_i u|^2 = \int_{B(0,R)} \nabla \cdot \Big(\sum\nolimits_i \partial_i u \nabla u \partial_i u \Big) - \int_{B(0,R)} \nabla u \cdot \nabla \Delta u \\
&= - \int_{B(0,R)} \nabla u \cdot \nabla \Delta u + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{B(0,R)} \Delta u \Delta u - \int_{\partial B(0,R)} \nabla u \Delta u \cdot N \, \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N \, \mathrm{d}\sigma \\
&= \int_{B(0,R)} f^2 + \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N \, \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned}$$

da $f = \Delta u = 0$ auf $\partial B(0, R)$. Mit den dritten Abschätzungen in (4.49) folgt

$$|D^k u(x)| \leq \int_\Omega |D^k \Gamma(x - y)| \cdot |f(y)| \, \mathrm{d}^n y \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{(|x| - R_0)^{n+k-2}} \quad \text{für } |x| > R_0, k = 1, 2.$$

Für $f \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt folgende Abschätzung und damit auch (4.51) für $C(n, 2) = 1$:

$$\left| \int_{\partial B(0,R)} \sum\nolimits_i \partial_i u \nabla \partial_i u \cdot N \, \mathrm{d}\sigma \right| \leq \frac{\omega_n R^{n-1} C_n^2 \|f\|_{L^1(\Omega)}^2}{(R - R_0)^{n-1} (R - R_0)^n} \to 0 \qquad \text{für } R \to \infty.$$

Für $f \in L^2(\Omega)$, wählen wir $f_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $f_m \to f \in L^2(\Omega)$ Mit Lemma 4.29 ist $N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ stetig, also $Nf_m \to Nf$ in $L^2(\Omega)$. Aus dem schon Bewiesenen folgt

$$\limsup_{m \to \infty} \|D^2(Nf_m)\|_{L^2(\Omega)} \leq \limsup_{m \to \infty} \|f_m\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies ergibt $Nf \in W^{2,2}(\Omega)$ und (4.51) für f. Damit ist (4.51) für $p = 2$ bewiesen.

Für feste $1 \leq i, j \leq n$ erhalten wir den stetigen, linearen Operator

$$\partial_j \partial_i N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \qquad\qquad (\partial_j \partial_i N) f := \partial_j \partial_i (Nf).$$

Aus (4.51) für $p = 2$ mit $C(n, 2) = 1$ folgt für $t > 0$

$$\mu(|\partial_j \partial_i N f| > t) t^2 \leq \int_{[|\partial_j \partial_i N f| \geq t]} |\partial_j \partial_i N f|^2 \leq \int_\Omega |f|^2 \qquad \mu(|\partial_j \partial_i N f| > t) \leq \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}^2}{t^2}. \tag{4.52}$$

Als nächsten zeigen wir

$$\mu(|\partial_j \partial_i N f| > t) \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{t} \text{ für } t > 0 \tag{4.53}$$

Wir setzen f auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ durch 0 fort, fixieren $t > 0$ und wählen $R > 0$ mit

$$\Omega \subset Q_0 := [-R, R]^n, \qquad \|f\|_{L^1(\Omega)} \leq t\mu(Q_0). \tag{4.54}$$

Wir zerlegen den Würfel Q_0 gemäß Calderon-Zygmund, d.h. wir halbieren die Seiten von Q_0 und zerlegen Q_0 in 2^n kongruente Unterwürfel Q. Für sie gilt entweder

$$\frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| \leq t \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f| > t.$$

Die ersten werden weiter unterteilt. Die zweiten fassen wir sukzessiv zu einer Familie $\{Q_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ von Unterwürfeln zusammen, deren Innere paarweise disjunkt sind. Jedes Q_l ist in einem eindeutigen Vorgängerwürfel $\tilde{Q}_l$ doppelter Seitenlänge enthalten, der

$$\frac{1}{\mu(\tilde{Q}_l)} \int_{\tilde{Q}_l} |f| \leq t \qquad t < \frac{1}{\mu(Q_l)} \int_{Q_l} |f| \leq 2^n t. \tag{4.55}$$

erfüllt, weil $\mu(\tilde{Q}_l) = 2^n \mu(Q_l)$ gilt. Für jedes $x \in A := Q_0 \setminus \cup_{l \in \mathbb{N}} Q_l$ gibt es eine Folge $Q_{x,l}$ von Unterwürfeln mit beliebig kleinen Kantenlängen, die x enthält. Dann folgt aus dem Konzept der Lebesguepunkte[6], dass

$$|f(x)| = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{\mu(Q_{x,l})} \int_{Q_{x,l}} |f| \leq t$$

fast überall in $x \in A$ gilt. Wir zerlegen $f = g + h$ mit $h := f - g$ und folgern

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ \frac{1}{\mu(Q_l)} \int_{Q_l} f & \text{für } x \in Q_l, l \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad |g| \leq 2^n t \text{ fast überall auf } Q_0 \tag{4.56}$$

$$h = 0 \text{ auf } A \qquad \int_{Q_l} h = 0 \text{ für } l \in \mathbb{N} \qquad \int_{Q_l} |g| = \left| \int_{Q_l} f \right| \leq \int_{Q_l} |f|$$

$$\|h\|_{L^1(Q_0)} \leq \|f\|_{L^1(Q_0 \setminus A)} + \|g\|_{L^1(Q_0 \setminus A)} \leq 2\|f\|_{L^1(\Omega)} \quad \|g\|_{L^1(Q_0)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.57}$$

Da $\partial_j \partial_i N$ linear ist, gilt $\quad |\partial_j \partial_i N f| \leq |\partial_j \partial_i N g| + |\partial_j \partial_i N h| \quad$ und

$$\mu(|\partial_j \partial_i N f| > t) \leq \mu(|\partial_j \partial_i N g| > \tfrac{t}{2}) + \mu(|\partial_j \partial_i N h| > |\tfrac{t}{2}). \tag{4.58}$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite sehen wir mit (4.52), (4.56) und (4.57)

$$\mu\left(|\partial_j \partial_i N g| > \tfrac{t}{2}\right) \leq \frac{4\|g\|^2_{L^2(Q_0)}}{t^2} \leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^1(Q_0)}}{t} \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.59}$$

[6]In E.Stein:"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions" Kapitel I §1.8.

Zur Abschätzung des zweiten Terms schreiben wir $h = \sum_{l=1}^{\infty} h_l$ mit $h_l := h \cdot \chi_{Q_l}$, da $h = 0$ auf A mit (4.56). Für $x \notin Q_l$ und das Zentrum $\bar{y}$ von $Q_l = \bar{y} + [-\varrho, \varrho]^n$ folgt

$$\partial_j \partial_i N h_l(x) = \int_{Q_l} \partial_j \partial_i \Gamma(x-y) h_l(y) \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}} y = \int_{Q_l} \left(\partial_j \partial_i \Gamma(x-y) - \partial_j \partial_i \Gamma(x-\bar{y})\right) h_l(y) \,\mathrm{d}^{\mathrm{n}} y$$

$$|\partial_j \partial_i N h_l(x)| \leq C_n \sqrt{n} \varrho \cdot d(x, Q_l)^{-n-1} \int_{Q_l} |h_l| \text{ wegen } |D^3 \Gamma(x)| \leq C_n |x|^{-n-1} \text{ für } x \neq 0.$$

Da $d(x, Q_l) \geq |x - \bar{y}| - \sqrt{n}\varrho \geq \frac{1}{2}|x - \bar{y}|$ für $x \notin B(\bar{y}, 2\sqrt{n}\varrho) =: B_l$ ergibt sich

$$\int_{Q_0 \setminus B_l} |\partial_j \partial_i N h_l| \leq \int_{\mathbb{R}^n - B_l} C_n \varrho |x - \bar{y}|^{-n-1} \left(\int_{Q_l} |h_l| \right) \mathrm{d}x \leq C_n \int_{Q_l} |h_l|.$$

Setzen wir $A^* := Q_0 \setminus \cup_{l \in \mathbb{N}} B_l$, so erhalten wir mit Summation und (4.57)

$$\int_{A^*} |\partial_j \partial_i N h| \leq C_n \|f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \mu([|\partial_j \partial_i N h| > \tfrac{t}{2}] \cap A^*) \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.60}$$

Andererseits gilt wegen der zweiten Ungleichung in (4.55)

$$\mu(Q_0 \setminus A^*) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \mu(B_l) \leq C_n \sum_{l=1}^{\infty} \mu(Q_l) \leq \frac{C_n}{t} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{Q_l} |f| \leq \frac{C_n \|f\|_{L^1(\Omega)}}{t}. \tag{4.61}$$

Die beiden Ungleichungen (4.61) und (4.60) schätzen auch den zweiten Term von (4.58) in der gewünschten Form ab, so dass (4.53) folgt. Wir wenden den Marcinkiewiczinterpolationsssatz 4.32 an. Für $1 < p < 2$ ist dann wegen (4.52) und (4.53)

$$\partial_j \partial_i N := L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \qquad \text{mit} \qquad \partial_j \partial_i N\| \leq C(n,p)$$

stetig. Für $2 < p < \infty$, $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt mit (4.51) für $q = \frac{p}{p-1} \in (1,2)$

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \partial_j \partial_i (Nf) g \right| = \left| \int_\Omega (N \partial_j \partial_i f) g \right| = \left| \int_\Omega \partial_j \partial_i f N g \right| = \left| \int_\Omega f \partial_j \partial_i (Ng) \right| \\ \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\partial_j \partial_i N g\|_{L^q(\Omega)} \leq C(n,q) \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\|\partial_j \partial_i N f\|_{L^p(\Omega)} \leq C(n,p) \|f\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{also} \qquad \|\partial_j \partial_i N\| \leq C(n,p).$$

Mit Lemma 4.29 folgt (4.51) durch Approximation. **q.e.d.**

Marcinkiewiczinterpolationssatz 4.32. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $1 \leq q < p \leq \infty$ und T eine subadditive Abbildung von $L^q(\Omega) + L^p(\Omega)$ in die meßbaren Funktionen auf Ω mit*

$$|T(f_1 + f_2)| \leq |Tf_1| + |Tf_2| \text{ (subadditiv)} \qquad \mu(|Tf| > t) \leq \left(\frac{T_q \|f\|_{L^q(\Omega)}}{t} \right)^q$$

$$\mu(|Tf| > t) \leq \left(\frac{T_p \|f\|_{L^p(\Omega)}}{t} \right)^p \text{ für } p < \infty \qquad \|Tf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq T_\infty \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ für } p = \infty$$

und $t > 0$. Dann gilt für $f \in L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega) + L^p(\Omega)$ mit $q < r < p$ und $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$

$$\|Tf\|_{L^r(\Omega)} \leq C(p,q,r) T_q^\alpha T_p^{1-\alpha} \|f\|_{L^r(\Omega)} \tag{4.62}$$

Beweis: Für $f \in L^r(\Omega) \subset L^q(\Omega) + L^p(\Omega)$ und $s > 0$ zerlegen wir

$$f = f_1 + f_2 \qquad f_1 := f \cdot \chi_{[|f|>s]} \in L^q(\Omega) \qquad f_2 := f \cdot \chi_{[|f|\leq s]} \in L^p(\Omega).$$

Es gilt $|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$, also für $p < \infty$

$$\mu(|Tf| > t) \leq \mu(|Tf_1| > \tfrac{t}{2}) + \mu(|Tf_2| > \tfrac{t}{2}) \leq \left(\frac{2T_q \|f_1\|_{L^q(\Omega)}}{t} \right)^q + \left(\frac{2T_p \|f_2\|_{L^p(\Omega)}}{t} \right)^p.$$

Im Fall $p = \infty$ gilt $|Tf_2| \leq T_\infty s = \frac{t}{2}$ für $s = \frac{t}{2T_\infty}$, also auch ohne den zweiten Term

$$\mu(|Tf| > t) \leq \mu(|Tf_1| > \tfrac{t}{2}) \leq \left(\frac{2T_q \|f_1\|_{L^q(\Omega)}}{t} \right)^q.$$

Für $s = \frac{t}{A}$ mit einem später zu wählendem $A > 0$ folgt mit der Substitution $\tau = \frac{t}{A}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Tf|^r &= -\int_0^\infty t^r d\mu(|TF > t) = \int_0^\infty \mu(|TF > t) dt^r = r \int_0^\infty t^{r-1} \mu(|Tf| > t)\, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq r(2T_q)^q \int_0^\infty t^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>t/A]} |f|^q \right) \mathrm{d}t + r(2T_p)^p \int_0^\infty t^{r-1-p} \left(\int_{[|f\leq t/A]} |f|^p \right) \mathrm{d}t \\
&= r(2T_q)^q A^{r-q} \int_0^\infty \tau^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>\tau]} |f|^q \right) \mathrm{d}\tau + r(2T_p)^p A^{r-p} \int_0^\infty \tau^{r-1-p} \left(\int_{[|f|\leq\tau]} |f|^p \right) \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge und setzen ein:

$$\int_0^\infty \tau^{r-1-q} \left(\int_{[|f|>\tau]} |f|^q \right) \mathrm{d}\tau = \int_\Omega |f|^q \int_0^{|f|} \tau^{r-1-q}\, \mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{r-q} \int_\Omega |f|^r$$

$$\int_0^\infty \tau^{r-1-p} \left(\int_{[|f|\leq\tau]} |f|^p \right) \mathrm{d}\tau = \int_\Omega |f|^p \int_{|f|}^\infty \tau^{r-1-p}\, \mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{p-r} \int_\Omega |f|^r$$

$$\int_\Omega |Tf|^r \leq \left(\tfrac{r}{r-q} (2T_q)^q A^{r-q} + \tfrac{r}{p-r} (2T_p)^p A^{r-p} \right) \int_\Omega |f|^r. \tag{4.63}$$

Die beste Wahl ist $A = 2T_q^{-\frac{q}{p-q}} T_p^{\frac{p}{p-q}}$ (d.h. $A = 2T_\infty$ und $\frac{r}{p-r} = 0$ in (4.63) für $p = \infty$):

$$(2T_q)^q A^{r-q} = (2T_q)^{q\frac{p-r}{p-q}} (2T)_p^{p\frac{r-q}{p-q}} \qquad (2T_p)^p A^{r-p} = (2T_q)^{q\frac{p-r}{p-q}} (2T)_p^{p\frac{r-q}{p-q}}.$$

Die Gleichung $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{q} + \frac{1-\alpha}{p}$ ist äqivalent zu $\alpha(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ also $\alpha = \frac{q}{r}\frac{p-r}{p-q}$ und $1 - \alpha = \frac{p}{r}\frac{r-q}{p-q}$. In beiden Fällen $p < \infty$ und $p = \infty$ folgt (4.62) aus

$$\|Tf\|_{L^r(\Omega)} \leq 2\left(\tfrac{r}{r-q} + \tfrac{r}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} T_q^\alpha T_p^{1-\alpha} \|f\|_{L^r(\Omega)} \quad \text{mit } C(p,q,r) = 2\left(\tfrac{r}{r-q} + \tfrac{r}{p-r}\right)^{1/r} \text{.q.e.d.}$$

Die Differentialoperatoren L (2.3) sollen neben (4.46)-(4.47) folgendes erfüllen:

$$\text{es gibt } 0 < \epsilon, \varrho < 1 \quad \operatorname*{osc}_{B(x,\varrho)\cap\Omega} a_{ij} = \sup_{y,z \in B(x,\varrho)\cap\Omega} a_{ij}(y) - a_{ij}(z) < \epsilon \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{4.64}$$

Bemerkung 4.33. *Für $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ ist für alle $\epsilon > 0$ (4.64) mit einem $\varrho > 0$ erfüllt. Eine Vorgabe solcher $\varrho > 0$ für alle hinreichend kleinen $\epsilon > 0$ heißt Stetigkeitsmodul.*

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne wieder $\Omega_\pm := \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \pm(0,\infty)$ und $\Omega_0 = \Omega \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Calderon-Zygmundabschätzungen 4.34. *Sei $1 < p < \infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der auf $B(0,2)$ bzw. $B(0,2)_+$ (4.46)-(4.47) und (4.64) mit hinreichend kleinem $\epsilon = \epsilon(\Lambda, n, p) > 0$ erfüllt. Dann erfüllt jede Lösung $u \in W^{2,p}(B(0,2))$ von $Lu = f$ auf $B(0,2)$ mit $f \in L^p(B(0,2))$ folgende Abschätzung:*

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2))}). \tag{4.65}$$

Für $\varphi \in W^{2,p}(B(0,2)_+)$ und $f \in L^p(B(0,2)_+)$ erfüllt jede Lösung $u \in W^{2,p}(B(0,2)_+)$

$$Lu = f \text{ auf } B(0,2)_+ \qquad\qquad u = \varphi \text{ auf } B(0,2)_0$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}). \tag{4.66}$$

Beweis: Wegen $\varrho < 1$ ist $B(x_0, \varrho) \subset B(0,2)$ für $x_0 \in B(0,1)$. Für $v \in W^{2,p}(B(x_0,\varrho))$ betrachten wir $L_0 v := \sum_{ij} a_{ij}(x_0)\partial_j\partial_i v$. Für $v \in W_0^{2,p}(B(x_0,\varrho)) \subset W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt aus Lemma 4.30 nach Anwendung einer linearen Transformation

$$\begin{aligned}
&\|D^2 v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \leq C(\Lambda,n,p)\|L_0 v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \\
&\leq C(\Lambda,n,p)\left(\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij} - a_{ij}(x_0))\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}\right) \\
&\leq C(\Lambda,n,p)\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + C(\Lambda,n,p) \operatorname*{osc}_{B(x_0,\varrho)}\left(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\right)\|D^2 v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}.
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,p)$ folgt durch Absorption

$$\|D^2 v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \leq C(\Lambda,n,p)\left\|\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v\right\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}.$$

Für $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$, $\sigma' = \frac{1+\sigma}{2}$ erhalten wir für $v := u\eta \in W_0^{2,p}(B(x_0, \varrho))$ mit geeigneten

$$\eta \in C_0^\infty(B(x_0, \sigma'\varrho)) \quad \eta \equiv 1 \text{ auf } B(x_0, \sigma\varrho) \quad |D^k\eta| \leq C_n((1-\sigma)\varrho)^{-k} \text{ für } k = 0, 1, 2.$$

Dabei schreiben wir η als die Verkettung von einer geeigneten Funktion in $C_0^\infty((-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}))$, die auf einer Umgebung von $[0, \frac{1}{2}]$ gleich 1 ist, mit folgender Funktion:

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\varrho}|x - x_0| & \text{für } |x - x_0| \leq \sigma\varrho \\ 1 - \frac{1}{2(1-\sigma)\varrho}(\varrho - |x - x_0|) & \text{für } |x - x_0| > \sigma\varrho \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)^2\varrho^2\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \leq \quad & (1-\sigma)^2\varrho^2\|D^2v\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \leq \\
\leq (1-\sigma)^2\varrho^2 C(\Lambda, n, p) & \Big\|\sum\nolimits_{ij}(a_{ij}\eta\partial_j\partial_i u + 2a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta + ua_{ij}\partial_j\partial_i\eta)\Big\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} \\
\leq C(\Lambda, n, p)\big((1-\sigma)^2\varrho^2 & \|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + (1-\sigma)\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))} + \|u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))}\big) \\
= C(\Lambda, n, p)\big((1-\sigma)^2\varrho^2 & \|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + 2(1-\sigma')\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))} + \|u\|_{L^p(B(x_0,\sigma'\varrho))}\big).
\end{aligned}$$

Um den mittleren Term mit dem Interpolationslemma 3.44 zu absorbieren, schätzen wir zuerst die rechte Seite durch folgende Suprema ab, und erhalten dann

$$S_2 \leq C(\Lambda, n, p)(\tfrac{\varrho^2}{4}\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + 2S_1 + S_0), \quad S_k := \sup_{\frac{1}{2}\leq\sigma<1}(1-\sigma)^k\varrho^k\|D^k u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))}. \tag{4.67}$$

Die Anwendung des Interpolationslemmas 3.44 auf die reskalierte Funktion $\tilde{u}(y) = u(x_0 + \sigma\varrho y)$ in $W^{2,p}(B(0,1))$ ergibt mit $\epsilon = \delta(1-\sigma)$ für $0 < \delta < 1$ und $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$:

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} &= (1-\sigma)\varrho(\sigma\varrho)^{\frac{n}{p}-1}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^p(B(0,1))} \\
&\leq \delta\tfrac{(1-\sigma)^2}{\sigma}(\sigma\varrho)^{\frac{n}{p}}\|D^2\tilde{u}\|_{L^p(B(0,1))} + C(n,p)\tfrac{1}{\delta\sigma}(\sigma\varrho)^{\frac{n}{p}}\|\tilde{u}\|_{L^p(B(0,1))} \\
&= \delta\sigma(1-\sigma)^2\varrho^2\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} + C(n,p)\tfrac{1}{\delta\sigma}\|u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \\
&\leq \delta\sigma S_2 + C(n,p)\tfrac{1}{\delta\sigma}S_0.
\end{aligned}$$

Das Supremum über $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ ergibt

$$S_1 = \sup_{\frac{1}{2}\leq\sigma<1}(1-\sigma)\varrho\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,\sigma\varrho))} \leq \delta S_2 + 2C(n,p)\delta^{-1}S_0.$$

Wir absorbieren S_1 mit kleinem $\delta = \delta(\Lambda, n, p)$ in (4.67) und wählen danach $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq C(\Lambda, n, p)(\varrho^2\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \|u\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}), \\
\|D^2u\|_{L^p(B(x_0,\frac{\varrho}{2}))} &\leq 4\varrho^{-2}S_2 \leq 4C(\Lambda, n, p)(\|f\|_{L^p(B(x_0,\varrho))} + \varrho^{-2}\|u\|_{L^p(B(x_0,\varrho))}).
\end{aligned}$$

Überdecken wir $B(0,1)$ mit endlich vielen Bällen $B(x_0, \frac{\varrho}{2})$ mit $x_0 \in B(0,1)$, so folgt

$$\|D^2u\|_{L^p(B(0,1))} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2))}).$$

Schließlich folgt (4.65) aus dem Interpolationslemma 3.44.

Im Fall mit Rand können wir wegen folgender Abschätzung wieder $\varphi = 0$ annehmen:

$$\|L\varphi\|_{L^p(B(0,2)_+)} \leq C(\Lambda, n, p)\|\varphi\|_{W^{2,p}(B(0,2)_+)}.$$

Zuerst nehmen wir $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \leq \epsilon$ an, und setzen u mit E_- (3.24) ungerade auf $B(0,2)$ fort, d.h. für $(y,t) \in B(0,2)_-$ sei

$$\begin{aligned} &u(y,t) := -u(y,-t) \qquad\qquad f(y,t) := f(y,-t) \\ &a_{ij} := (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor + \lfloor \frac{j}{n} \rfloor} a_{ij}(y,-t) \quad b_i(y,t) := (-1)^{\lfloor \frac{i}{n} \rfloor} b_i(y,-t) \quad c(y,t) := c(y,-t). \end{aligned}$$

Mit Proposition 3.41 sehen wir $u \in W^{2,p}(B(0,2))$, L erfüllt (4.46)-(4.47) auf $B(0,2)$

$$\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2))} \leq \epsilon \qquad \|f\|_{L^p(B(0,2))} \leq 2^{1/p}\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} \qquad Lu = f.$$

Mit dem bereits bewiesenen Resultat folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Lambda, n, p)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2))}) \\ &\leq C(\Lambda, n, p)(\|f\|_{L^p(B(0,2))} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall wählen wir mit (4.64) für alle $x_0 \in B(0,1)_0$ ein symmetrisches (a^0_{ij}) mit $\|a_{ij} - a^0_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \leq \epsilon$. Nach einem affinen Parameterwechsel transformiert sich L zu $\tilde{L}$ und (a^0_{ij}) zu (δ_{ij}) mit $\|\tilde{a}_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,c_0(\Lambda)\varrho))} \leq C(\Lambda)\epsilon$. Mit dem bereits Bewiesenen erhalten wir schließlich mit einer endlichen Überdeckung

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,p}(B(x_0,c_0(\Lambda)\varrho)_+)} &\leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}) \\ \|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)\cap\{0<x_n<c_0(\Lambda)\varrho\})} &\leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}) \end{aligned}$$

und insgesamt mit (4.65) auch (4.66)

$$\|u\|_{W^{2,p}(B(0,1)\cap\{x_n>c_0(\Lambda)\varrho\})} \leq C(\Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|u\|_{L^p(B(0,2)_+)}).$$ **q.e.d.**

Globale Calderon-Zygmundabschätzungen 4.35. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}$, $1 < p < \infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der auf Ω (4.46)-(4.47) und (4.64) mit genügend kleinem $\epsilon = \epsilon(\Omega, \Lambda, n, p) > 0$ erfüllt. Für $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ und $f \in L^p(\Omega)$ erfüllt eine Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ des Dirchletproblems*

$$Lu = f \text{ fast überall in } \Omega \qquad\qquad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.68}$$

Beweis: Wir können $\varphi = 0$ annehmen. Wir betrachten $x_0 \in \partial\Omega$. Da $\partial\Omega \in C^{1,1}$, können wir $\partial\Omega$ in einer Umgebung $U(x_0)$ mit einem $C^{1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und $\tilde{u} := u \circ \Psi^{-1} \in W^{2,p}(B(0,2)_+)$ erfüllt $\tilde{u} = 0$ auf $B(0,2)_0$. Wir betrachten wie im Beweis von Satz 4.19 den Differentialioperator $\tilde{L}$ mit

$$\tilde{a}_{kl} := \Big(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_i\Psi_k\partial_l\Psi_l\Big) \circ \Psi^{-1} \qquad \tilde{b}_k := \Big(\sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i\Psi_k + \sum\nolimits_i b_i\partial_i\Psi_k\Big) \circ \Psi^{-1}$$
$$\tilde{c} := c \circ \Psi^{-1} \in L^\infty(B(0,2)_+) \qquad \tilde{f} := f \circ \Psi^{-1} \in L^p(B(0,2)_+)$$

so gilt $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ auf $B(0,2)_+$. Weiter erfüllt $\tilde{f}$ (4.46)-(4.47) und (4.64) mit $\Lambda, \varrho, \epsilon$ ersetzt durch $C(\Lambda,\Psi,n), c_0(\Psi)\varrho, C_0(\Psi,\Lambda)\epsilon$. Setzen wir $V(x_0) := \Psi^{-1}(B(0,1))$, so erhalten wir aus den Calderon-Zygmundabschätzungen (4.65) folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|u\|_{W^{2,p}(V(x_0)\cap\Omega)} &\le C(\Psi,n,p)\|\tilde{u}\|_{W^{2,p}(B(0,1)_+)}\\ &\le C(\Psi,\Lambda,n,p,\varrho)(\|\tilde{f}\|_{L^p(B(0,2)_+)} + \|\tilde{u}\|_{L^p(B(0,2)_+)})\\ &\le C(\Psi,\Lambda,n,p,\varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Genauso erhalten wir den Satz 4.34 für jedes $x_0 \in \Omega$ eine Umgebung $V(x_0) \subset \Omega$ mit

$$\|u\|_{W^{2,p}(V(x_0))} \le C(\Lambda, d(x_0,\partial\Omega), n, p, \varrho)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).$$

Indem wir die kompakte Menge $\bar{\Omega} \subset V(x_0) \cup \ldots \cup V(x_N)$ mit endlich vielen $x_1, \ldots, x_N \in \bar{\Omega}$ überdecken folgt (4.68) aus diesen beiden Abschätzungen. **q.e.d.**

Die Eindeutigkeit von starken Lösungen aus $W^{2,p}$ für das Dirichletproblem mit $c \le 0$ folgt für $p \ge n$ aus dem Eindeutigkeitsatz 4.26, bzw. dem Alexandroff'schen Maximumprinzip 4.22. Für $1 < p < n$ brauchen wir zuerst ein Regularitätsresultat.

Satz 4.36. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < q, p < \infty$, und L ein Differentialoperator in Nicht-Divergenzform* (2.3)*, der auf Ω* (4.46)-(4.47) *und* (4.64) *mit $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,p,q) > 0$ erfüllt. Eine starke Lösung $u \in W^{2,q}(\Omega)$ von $Lu = f$ auf Ω mit $f \in L^p(\Omega)$ liegt in $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Gilt darüberhinaus $\partial\Omega \in C^{1,1}$,* (4.64) *mit $\epsilon = \epsilon(\Omega,\Lambda,n,p,q) > 0$ und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, so liegt die Lösung sogar in $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Beweis: Es genügt $p > q$ zu betrachten. Wir betrachten $x_0 \in \Omega$ und $B(x_0,\varrho_0) \Subset \Omega$ mit $0 < \varrho_0 < \varrho$, also existiert mit (4.64) ein symmetrisches $(a^0_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\|a_{ij} - a^0_{ij}\|_{L^\infty(B(x_0,\varrho))} \le \epsilon.$$

Für ein $\eta \in C^\infty_0(B(x_0,\varrho_0))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(x_0,\frac{\varrho_0}{2})$ und $v := u\eta \in W^{2,q}_0(B(x_0,\varrho))$ gilt

$$L_0 v := \sum\nolimits_{ij} a^0_{ij}\partial_j\partial_i v = \sum\nolimits_{ij}(a^0_{ij} - a_{ij})\partial_j\partial_i v + g \text{ auf } \mathbb{R}^n \quad \text{mit}$$
$$g := \eta f - \sum\nolimits_i \eta b_i\partial_i u - \eta c u + \sum\nolimits_{ij}(2a_{ij}\partial_i u\partial_j\eta + u a_{ij}\partial_j\partial_i\eta).$$

Mit dem Soboleveinbettungssatz 3.46 folgt $u \in W^{1,\frac{nq}{n-1}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $g \in L^r(B(x_0,\varrho_0))$ für $r := \min\{p, \frac{nq}{n-1}\} \in (q,p]$. Mit einer linearen Abbildung transformieren wir L_0 in den Laplaceoperator. Aufgrund dem Spezialfall der Calderon-Zygmundungleichung 4.31 erhalten wir mit der Green'schen Darstellungsformel (4.50), und Approximation für $1 < s < \infty$ einen Operator $N_s : L^s(B(x_0,\rho_0)) \to W^{2,s}(B(x_0,\rho_0))$ mit

$$\|N_s\| \le C(\Lambda,n,s) \qquad \text{und} \qquad N_s L_0 w = w \text{ für alle } w \in W^{2,s}_0(B(x_0,\rho_0))$$

Also löst v die Fixpunktgleichung $v = T_s v + N_s g$ mit

$$T_s w := N_s\left(\sum\nolimits_{ij}(a^0_{ij} - a_{ij})\partial_j\partial_i w\right)$$
$$\|T_s w\|_{W^{2,s}(B(x_0,\rho_0))} \le \|N_s\|\|(a^0_{ij} - a_{ij})\partial_j\partial_i w\|_{L^s(B(x_0,\rho_0))} \le C(\Lambda,n,s)\epsilon\|w\|_{W^{2,s}(B)}.$$

Deshalb ist T_s für $s = q, r$ für hinreichend kleines $\epsilon = \epsilon(\Lambda,n,p,q)$ eine Kontraktion: $\|T_s\| \le \frac{1}{2}$. Wegen $g \in L^r(B(x_0,\rho_0)) \subset L^q(B(x_0,\rho_0))$ und dem Banachschen Fixpunktsatz und hat $w \mapsto T_s w + N_s g$ für $s = q, r$ jeweils einen eindeutigen Fixpunkt v_s in $W^{2,s}(B(x_0,\rho_0)) \subset W^{2,q}(B(x_0,\rho_0))$. In $W^{2,q}(B(x_0,\rho_0))$ gilt dann $v = v_q = v_r$ und damit auch $v \in W^{2,r}(B(x_0,\rho_0))$. Iterieren wir dies mit $r_l := \min\{p, \left(\frac{n}{n-1}\right)^l q\}$ endlich oft bis $r_N = p$, so folgt $u \in W^{2,p}(B(x_0,\frac{\varrho_0}{2}))$ und $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Wegen $\partial\Omega \in C^{1,1}$ können wir im Fall mit Rand für $x_0 \in \partial\Omega$ folgendes annehmen:

$$\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+ \qquad \|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2)_+)} \le \epsilon \qquad \varphi = 0$$
$$Lu = f \text{ in } B(0,2)_+ \qquad u = 0 \text{ auf } B(0,2)_0.$$

Wir setzen u mit E_- (3.24) ungerade auf $B(0,2)$ fort, d.h. für $(y,t) \in B(0,2)_-$ sei

$$u(y,t) := -u(y,-t) \qquad f(y,t) := f(y,-t)$$
$$a_{ij}(y,t) := (-1)^{\lfloor\frac{i}{n}\rfloor + \lfloor\frac{j}{n}\rfloor} a_{ij}(y,-t) \quad b_i(y,t) := (-1)^{\lfloor\frac{i}{n}\rfloor} b_i(y,-t) \quad c(y,t) := c(y,-t).$$

Mit Proposition 3.41 sehen wir $u \in W^{2,q}(B(0,2))$, L erfüllt (4.46)-(4.47) in $B(0,2)$, $\|a_{ij} - \delta_{ij}\|_{L^\infty(B(0,2))} \le \epsilon$ und $f \in L^p(B(0,2))$ mit $Lu = f$. Mit dem bereits bewiesenen Resultat folgt $u \in W^{2,p}(B(0,1))$, also $u \in W^{2,p}(\Omega)$. **q.e.d.**

Mit den globalen Calderon-Zygmundabschätzungen zeigen wir nun die

Existenz starker Lösungen für das Dirichletproblem 4.37. *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^{1,1}, 1 < p < \infty$, und L ein elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform (2.3), der auf Ω (4.46)-(4.47) erfüllt mit $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ und $c \le 0$. Dann existiert für $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ und $f \in L^p(\Omega)$ genau eine starke Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ des Dirichletproblems $Lu = f$ fast überall auf Ω mit $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Diese erfüllt*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C(\Omega,\Lambda,p,\omega)(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)}) \text{ mit Stetigkeitsmodul } \omega. \tag{4.69}$$

Beweis: Die Differenz $u := u_2 - u_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ zweier Lösungen $u_1, u_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ löst das Dirichletproblem zu $f = 0$ und $\varphi = 0$. Mit Satz 4.36 folgt $u \in W^{2,n}(\Omega)$, und mit dem Einbettungssatz in Hölderräume, Satz 3.49, $u \in C^0(\bar{\Omega})$ und mit Proposition 3.35 $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Da $c \leq 0$, folgt mit dem Einbettungssatz Satz 4.26, dass $u = 0$, also $u_1 = u_2$, und es gibt höchstens eine Lösung des Dirichletproblems.

Zur Existenz können wir $\varphi = 0$ annehmen. Zuerst zeigen wir (4.69). Angenommen (4.69) git nicht, so gibt es L_m (2.3), die (4.46)-(4.47) erfüllen und einen Stetigkeitsmodul ω für $a_{ij,m}$ und $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit $u_m = 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} < \tfrac{1}{m}\|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Mit den globalen Calderon-Zygmundabschätzungen 4.35, folgt

$$\begin{aligned}
&\|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)(\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} + \|u_m\|_{L^p(\Omega)}) \\
&\|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega)\|u_m\|_{L^p(\Omega)} \text{ für } m \geq 2C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega).
\end{aligned}$$

Nehmen wir zusätzlich $\|u_m\|_{L^p(\Omega)} = 1$ an, so folgt $\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, und u_m ist beschränkt in $W^{2,p}(\Omega)$. Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert $u_m \to u$ schwach in $W^{2,p}(\Omega)$, stark in $W^{1,p}(\Omega)$, insbesondere $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Da $a_{ij,m}$ einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul haben, konvergiert $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$, $b_{i,m} \to b_i$ und $c_m \to c$ schwach in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q \leq \infty$ und eine weitere Teilfolge $m \to \infty$. Damit erfüllt L (2.3) mit Koeffizienten a_{ij}, b_i, c (4.46)-(4.47), und $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$.

Aus $\|L_m u_m\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ folgt $Lu = 0$ fast überall in Ω, und mit dem Eindeutigkeitsresultat folgt $u = 0$ im Widerspruch zu $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$, und somit ist (4.69) bewiesen.

Zur Existenz nehmen wir zuerst $L, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ an und schreiben in Divergenzform

$$L_d v = \sum_{ij} \partial_i(a_{ij}\partial_j v) + \sum_i \Big(b_i - \sum_j \partial_j a_{ji}\Big)\partial_i v + cv = \sum_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i v + \sum_i b_i \partial_i v + cv = Lv.$$

Da $c \leq 0$ existiert mit dem Satz 4.3 eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega)$ von $L_d u = f$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $f \in L^2(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{1,1}$ folgt $u \in W^{2,2}(\Omega)$ aus dem Satz von Friedrichs 4.8. Wegen (4.10) ist u eine starke Lösung des Dirichletproblems. Für $f \in L^p(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{1,1}$ folgt $u \in W^{2,p}(\Omega)$ aus Satz 4.36.

Allgemeines L, f approximieren wir mit $L_m, f_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$, $b_{i,m} \to b_i$ und $c_m \to c$ schwach in $L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$, $f_m \to f$ schwach in $L^p(\Omega)$, und L_m erfüllt (4.46)-(4.47) für 2Λ, und $a_{ij,m}, a_{ij}$ haben einen gemeinsamen Stetigkeitsmodul ω_0. Dann existiert wie gezeigt eine Lösung $u_m \in W^{2,p}(\Omega)$ mit

$$L_m u_m = f_m \text{ auf } \Omega \qquad u_m = 0 \text{ auf } \partial\Omega \qquad \|u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, \omega_0)\|f_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für eine Teilfolge $m \to \infty$ konvergiert $u_m \to u$ schwach in $W^{2,p}(\Omega)$, stark in $W^{1,p}(\Omega)$, und $L_m u_m \to L_u$ schwach in $L^p(\Omega)$, da $a_{ij,m} \to a_{ij}$ stark in $C^0(\bar{\Omega})$. Daraus folgt $Lu = f$ fast überall in Ω, und $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ist eine starke Lösung des Dirichletproblems.**q.e.d.**

Schließlich zeigen wir, dass starke Lösungen so regulär sind wie die Daten.

Satz 4.38. *Es sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 < p < \infty$, und L ein linearer, elliptischer Differentialoperator in Nicht-Divergenzform, der* (2.3), (4.47) *auf Ω erfüllt, $k \geq 1$ und*

$$\|a_{ij}\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|b_i\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad \|c\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \leq \Lambda \qquad f \in W^{k,p}(\Omega). \tag{4.70}$$

Für eine starke Lösung von $Lu = f$ in $u \in W^{2,q}(\Omega)$ für $1 < q < \infty$ folgt $u \in W^{k+2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega')} \leq C(\Omega, \Omega', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \qquad \text{für } \Omega' \Subset \Omega. \tag{4.71}$$

Ist $\partial\Omega \in C^{k+1,1}$ und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi \in W^{k+2,p}(\Omega)$, so gilt $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.72}$$

Beweis: Wieder können wir $\varphi = 0$ annehmen. Für $k = 0$ mit $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$ und (4.46) anstatt (4.70) folgt die Regularitätsaussage aus Satz 4.36, und die Abschätzungen aus den Calderon-Zygmundabschätzungen 4.34, 4.35 und Satz 4.37

Wir nehmen an, dass obige Aussage für $0, \ldots, k-1$ bereits gelten. Wir erhalten im Fall ohne Rand $u \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ und im Fall mit Rand $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ mit

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')} \leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \text{ für } \Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega''' \Subset \Omega, \tag{4.73}$$

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}). \tag{4.74}$$

Dabei beachten wir, dass der Stetigkeitsmodul von a_{ij} für $k = 0$ durch die Annahme $\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \leq \Lambda$ gegeben ist. Wie im Beweis von Satz 4.9 vereinfachen wir die Differentialgleichung im Fall mit und ohne Rand mit $\hat{f} \in W^{k,p}(\Omega)$ zu

$$L_0 u := \sum\nolimits_{ij} a_{ij} \partial_j \partial_i u = f - \sum\nolimits_i b_i \partial_i u - cu =: \hat{f} \text{ fast überall in } \Omega \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega''')} &\leq C(\Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega''')} + \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')}) \\
&\leq C(\Omega, \Omega''', \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \\
\|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq C(\Omega, \Lambda, n, p, k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Für die endliche Differenz $\partial_l^h u$, siehe (3.14), $l = 1, \ldots, n, 0 < |h| < d(\Omega'', \partial\Omega''')$, und $\bar{u}(x) := u(x + he_l)$ gilt mit(4.70), (4.73) und (4.75)

$$L(\partial_l^h u) = \partial_l^h \hat{f} - \sum\nolimits_{ij} (\partial_l^h a_{ij}) \partial_j \partial_i \bar{u} =: f_l^h \text{ fast überall in } \Omega''.$$

$$\|f_l^h\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} \leq \|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega''')} + C_n \|\partial_l^h a_{ij}\|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega''')}$$

Mit (4.71) für $k-1$ und (4.73) folgt $\partial_l^h u \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}(\Omega'')$ mit

$$\begin{aligned}\|\partial_l^h u\|_{W^{k+1,p}(\Omega')} &\leq C(\Omega'',\Omega',\Lambda,n,p,k)(\|f_l^h\|_{W^{k-1,p}(\Omega'')} + \|\partial_l^h u\|_{L^p(\Omega'')})\\ &\leq C(\Omega,\Omega',\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).\end{aligned}$$

Da wir $u \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ bereits wissen, konvergiert $\partial_l^h u \to \partial_l u$ stark in $W^{k,p}(\Omega')$ für $h \to 0$. Daraus folgt $\partial_l u \in W^{k+1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, also $u \in W^{k+2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, und (4.71) für k.

Im Fall mit Rand können wir den Rand mit einem $C^{k+1,1}$-Diffeomorphismus Ψ glattbiegen, und, da $\|v\|_{W^{k+2,p}(V)} \sim \|v \circ \Psi^{-1}\|_{W^{k+2,p}(\Psi(V))}$ mit einer von Ψ, n, p und k abhängigen Konstanten, genügt es lokal $\Omega \cap B(0,2) = B(0,2)_+$ zu betrachten.

Da wir $u \in W^{k+2,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap W^{k+1,p}(\Omega)$ bereits wissen, folgt aus (4.75),(4.74) und (4.76)

$$L_0(\partial_l u) = \partial_l \hat{f} - \sum\nolimits_{ij} (\partial_l a_{ij}) \partial_j \partial_i u =: f_l \text{ für } l = 1,\ldots,n \text{ fast überall in } B(0,2)_+ \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned}\|f_l\|_{W^{k-1,p}(B(0,2)_+} &\leq \|\hat{f}\|_{W^{k,p}(\Omega)} + C_n(\|\partial_l a_{ij}\|_{W^{k-1,\infty}(\Omega)} \|u\|_{W^{k+1,p}(\Omega)}\\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.78)\end{aligned}$$

Wir wählen $B(0,\frac{4}{3})_+ \subset \Omega_0 \subset B(0,\frac{5}{3})_+$ mit $\partial\Omega_0 \in C^\infty$ und $\eta \in C_0^\infty(B(0,\frac{4}{3}))$ mit $\eta \equiv 1$ auf $B(0,1)$. Mit Proposition 3.40 und Definition 3.36 folgt $\eta\partial_l u \in W_0^{1,p}(\Omega_0)$ für $l = 1,\ldots,n-1$ und mit (4.77) fast überall in $B(0,2)_+$

$$L_0(\eta\partial_l u) = \sum\nolimits_{ij} a_{ij}\partial_j\partial_i(\eta\partial_l u) = \eta f_l + \sum\nolimits_{ij} (2a_{ij}\partial_i\eta\partial_j\partial_l u + a_{ij}\partial_j\partial_i\eta\partial_l u) =: f_{l,\eta},$$

wegen $u \in W^{k+2,p}_{\text{loc}}(B(0,2)_+)$ und $a_{ij} \in C^{k-1,1}(B(0,2)_+) = W^{k,\infty}(B(0,2)_+)$. Dabei gilt

$$\|f_{l,\eta}\|_{W^{k-1,p}(B(0,2)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|_f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$$

mit (4.74) und (4.78). Aus (4.77) folgt mit (4.72) $\eta\partial_l u \in W^{k+1,p}(\Omega_0)$ für $k-1$ und

$$\begin{aligned}\|\partial_l u\|_{W^{k+1,p}(B(0,1)_+)} &\leq \|\eta\partial_l u\|_{W^{k+1,p}(\Omega_0)}\\ &\leq C(\Lambda,n,p,k)(\|f_{l,\eta}\|_{W^{k-1,p}(\Omega_0)} + \|\eta\partial_l u\|_{L^p(\Omega_0)})\\ &\leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}),\end{aligned}$$

$$\|\partial_i\partial_j u\|_{W^{k,p}(B(0,1)_+)} \leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \text{ für } (i,j) \neq (n,n), \quad (4.79)$$

da wir $u \in W^{k+2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ bereits wissen. Zuletzt erhalten wir aus (4.75)

$$\partial_n^2 u = a_{nn}^{-1}\left(-\sum\nolimits_{(i,j)\neq(n,n)} a_{ij}\partial_j\partial_i u + \hat{f}\right) \text{ in } B(0,2)_+,$$

also mit (4.47), (4.76) und (4.79) nacheinander schließlich $u \in W^{k+2,p}(B(0,1)_+)$ mit

$$\begin{aligned}\|\partial_n^2 u\|_{W^{k,p}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)})\\ \|u\|_{W^{k+2,p}(B(0,1)_+)} &\leq C(\Omega,\Lambda,n,p,k)(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}).\end{aligned}$$

Überdecken wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen Bällen, so folgt (4.72) aus (4.71). **q.e.d.**