Satz der Poincaré–Bendixson

Josef Ouma Schymanski

Contents

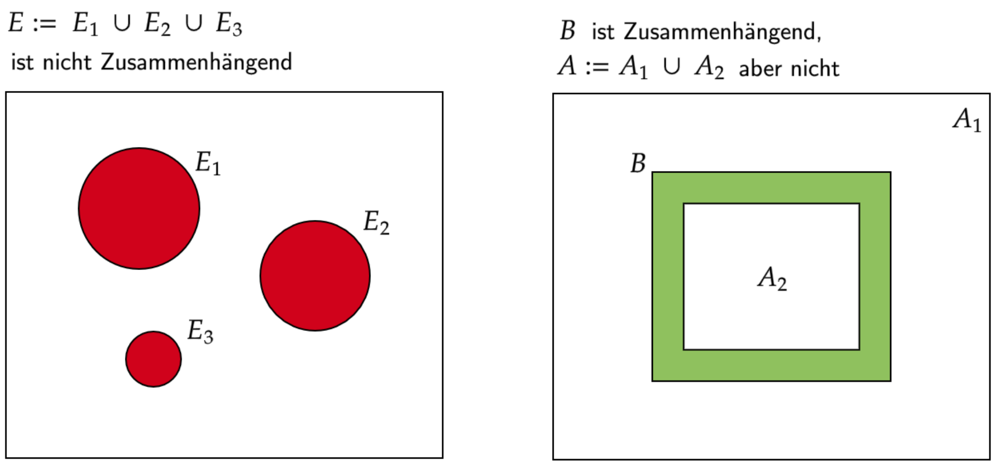
1 Einführung

Wir starten mit einer kurzen Erinnerung über die relevante Definitionen und Satze, die besonders wichtig sind, um den Satz von Poincaré–Bendixson zu verstehen.

Definition 1.1. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion.*
Ein Wert $x_0 \in U$ heißt kritischer (stationärer) Punkt von f, falls $f'(x_0)$ eine Nullstelle ist.

Definition 1.2. *Eine Topologischer Raum X heißt nicht zusammenhängend, falls es die Vereinigung zweier nichtleere disjunkte offene Mengen ist. Sonst heißt es zusammenhängend.*

Beispiel 1.3.

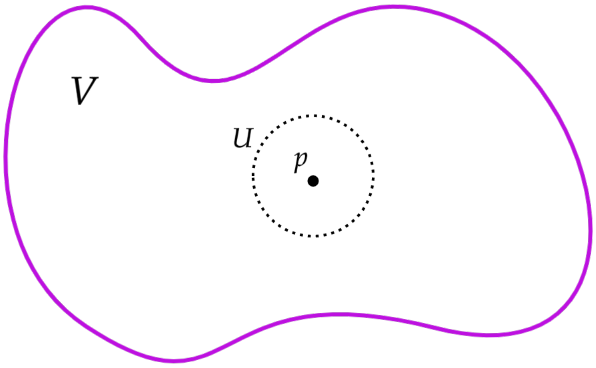


Definition 1.4. *Sei X eine topoligscher Raum, und p ein Punkt in X. Eine Umgebung von p ist einer Teilmenge V von X welche eine offene Menge U mit p enthalten. Das heißt,*

$$p \in U \subseteq V.$$

Die Umgebung V muss nicht unbedingt eine offene Teilmenge von X sein, aber falls V offen in X ist, heißt es eine offene Umgebung.

Beispiel 1.5.



Definition 1.6. *Eine Familie* $\Phi = (\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *von Abbildungen* $\phi_t : X \to X$*, für* $t \in \mathbb{R}$*, sodass* $\phi_0 = id$ *und*

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \; t, s \in \mathbb{R}$$

ist ein Fluss in X*.*

Eine Familie $\Phi = (\phi_t)_{t\geq 0}$ *für* $t \geq 0$*, von Abbildungen* $\phi_t : X \to X$*, für* $t \geq 0$*, sodass* $\phi_0 = id$ *und*

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \; t, s \geq 0$$

ist ein Semifluss in X*.*

Eine Familie Φ *von Abbildungen heißt Dynamisches System mit kontinuierliche Zeit, falls es eine Fluss oder Semifluss ist.*

Definition 1.7. *Sei* $x \in X$*. Für ein Fluss* $\Phi = (\phi_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ *von* X*,*

$$\gamma^-(x) = \{\phi_{-t}(x) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

heißt der negative Semiorbit und

$$\gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

sogar die positive Semiorbit von x*.*

Definition 1.8. *Eine Orbit heißt periodisch, falls* $\exists t \neq 0 \in \mathbb{R}$ *sodass*

$$\phi_t(x) = x$$

Definition 1.9. *Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, die ω-limus Menge von $x \in X$ ist definiert durch*

$$\omega(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} \overline{\{\phi_s(x) : s > t\}}$$

Sei außerdem $\Phi = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}_{>0}}$ von X ein Fluss. Die α-limus Menge von $x \in X$ ist definiert durch

$$\alpha(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{<0}} \overline{\{\phi_s(x) : s < t\}}$$

Proposition 1.10. *Gegeben sei ein Semifluss $\Phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ von X, für jedes $x \in X$ gilt die folgende Eigenschaften:*

1. *$y \in \omega(x)$ genau dann, wenn es eine Folge $t_k \to +\infty$ gibt, sodass*

$$\phi_{t_k}(x) \to y, \text{für } k \to \infty$$

2. *wenn Φ eine topologischer Semifluss ist, dann $\omega(x)$ ist vorwärts Φ-Invariant.*

Proof. Der Beweis kann man in Seite 4 von "Volodomir Benderevgenenko: J. Zeitkontinuierliche Dynamische Systeme": 0.2.2 Limes-Mengen und Grundeigenschaften; Proposition 2 finden. □

Proposition 1.11. *Gegeben sei ein topologischer Semifluss $\Phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ von X, wenn der positive Semiorbit $\gamma^+(x)$ von einem Punkt $x \in X$ ist kompakt und abgeschlossen, dann gilt:*

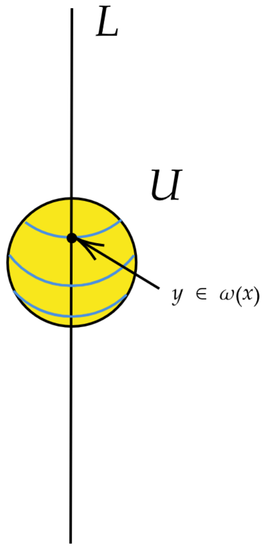
1. *$\omega(x)$ ist kompakt, zusammenhängend und nichtleer*

2. $\inf \{d(\phi_t(x), y) : y \in \omega(x)\} \to 0$, *falls $t \to +\infty$*

Proof. Der Beweis kann man in Seite 5 von "Volodomir Benderevgenenko: J. Zeitkontinuierliche Dynamische Systeme": 0.2.2 Limes-Mengen und Grundeigenschaften; Proposition 3 finden. □

Übung 1.12. *Sei ϕ_t eine Fluss mit Differentialgleichung $x' = f(x)$ für eine beliebige C^1 Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass wenn $L \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Transversal zu f (d.h., eine Strecke sodass $\forall x \in L$ die Richtungen von L und $f(x)$ generiert $\mathbb{R}^2$), dann für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ die Menge $\omega(x) \cap L$ enthält am meistens einer Punkt.*

Proof. Sei $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \omega(x)$, und U eine Umgebung von der Punkt y. Aus der Definition eines Limus-Menge, es existiert eine Folge $\phi_{t_k}(x)$ für $t_k \to \infty$ die gegen y konvergiert. Laut der Vorraussetzung ist $f(z)$ transversal in jeden Punkt z von L. Die lokale Lösung zu Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ mit $x(0) = z \in L$ schneiden L in genau einen Punkt.

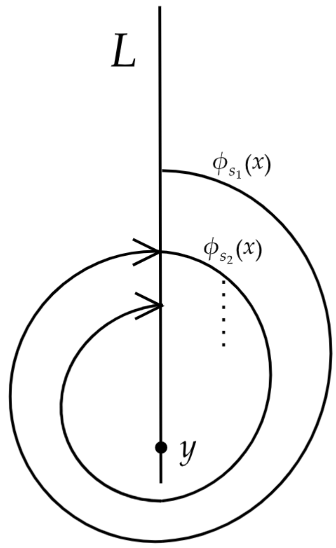


Dann folgt, dass für alle $z \in L \cap U$ gibt es eine Lösung der Differentialgleichungen $x_z'(t) = f(x_z(t))$ mit $x_z(0) = z$. Also haben wir die Abbildung

$$L \cap U \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^2,$$

$$(z, t) \longmapsto x_z(t).$$

Wegen der transversalität und dem Satz den inversen Funktionen, ist diese Abbildung eine lokale C^1 Diffeomorphismus. Deshalb, gibt es auch eine Folge $s_k \to +\infty$, sodass $\phi_{s_k}(x) \to y$ konvergiert. Wenn ϕ_{s_k} gleich ϕ_{s_l} für $k \neq l$ dann ist $\gamma^+(x)$ ein periodische Orbit und $\omega(x) = \gamma^+(x)$ auch. Dann kriegen wir:



Weil die Bahnkurve sich nicht selber schneiden kann, wissen wir dass $\phi_{s_n}(x)$ eine monotone Folge auf L ist.

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es auch eine s_k, s_{k+1}, mit $t \in [s_k, s_{k+1}]$, sodass alle Schnittpunkte von $\phi_t(x) \cap L$ für $t > s_k$ zwischen $\phi_{s_k}(x)$ und y liegen. Somit gibt es nur genau ein Schnittpunkt $\{y\}$ von $\omega(x) \cap L$. $\square$

2 Satz der Poincaré–Bendixson

Satz 2.1. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine C^1 Funktion und der Fluss ϕ_t gegeben durch die Differentialgleichung $x' = f(x)$. Wenn:*

1. *Der positive Semiorbit $\gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ von einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ beschränkt ist*

2. *$\omega(x)$ enthält keine kritische Punkte,*

dann ist $\omega(x)$ eine periodische Orbit.

Proof. Laut der Vorraussetzung, wissen wir dass die positive Semiorbit $\gamma^+(x)$ beschrankt ist. Eine beschrankte Menge hat einen kompakten Abschluss und somit folgt es nach der ersten Eigenschaft aus Proposition 1.11, dass $\omega(x)$ nichtleer ist.

Sei $p \in \omega(x)$. Dann gibt es eine $t_k \to +\infty$ sodass $\phi_{t_k}(x) \to p$, für $k \to \infty$. Da

$$\omega(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}_{>0}} \overline{\{\phi_s(x) : s > t\}} \in \gamma^+(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

in den Abschluss von $\gamma^+(x)$ enthalten ist. Es folgt aus der 2. Eigenschaft von Proposition 1.10 dass $\gamma^+(p) \in \omega(x)$ enthalten ist, und damit $\omega(p) \in \omega(x)$ auch. Dann folgt sofort, aus der 1. Eigenschaft von Proposition 1.11, dass $\omega(p)$ nichtleer ist.

Sei $q \in \omega(p)$. Da $\omega(q)$ enthalten ist in der Abschluss von $\gamma^+(p)$, es folgt von der erste Eigenschaft aus Proposition 1.11, dass $\omega(q)$ nichtleer ist und es folgt aus der zweite Eigenschaft von Proposition 1.10, dass $\omega(q) \subset \omega(p)$. Laut der Vorraussetzung, ist q keine kritischer Punkt und daher, es gibt eine Strecke L die q enthält und transversal zu f ist. (Siehe Übung 1.12)

Da $q \in \omega(p)$, es folgt aus der erste Eigenschaft von Proposition 1.10, dass es gibt eine Folge $t_k \to +\infty$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ sodass $\phi_{t_k}(p) \to q$ für $k \to \infty$. Weil die Strecke L transversal zu f ist, konnen wir annehmen, dass $\phi_{t_k}(p) \in L$ für $k \in \mathbb{N}$. Andererseits, da $p \in \omega(x)$, es folgt von der zweite Eigenschaft in Proposition 1.10, dass $\phi_{t_k}(p) \in \omega(x)$ für $k \in \mathbb{N}$. Da $\phi_{t_k}(p) \in \omega(x) \cap L$, es folgt aus der Übung 1.12. dass

$$\phi_{t_k}(p) = \phi_{t_l}(p) = q,$$

für $k, l \in \mathbb{N}$. Das impliziert dass $\gamma(p) \subset \omega(x)$ ein periodischer Orbit ist. Jetzt müssen wir zeigen, dass $\omega(x) = \gamma(p)$.

Sei $\omega(x) \backslash \gamma(p) \neq \emptyset$. Da $\omega(x)$ zusammenhängend ist und $\gamma(p)$ als periodischer Orbit abgeschlossen ist, ist $\omega(x)$ ohne $\gamma(p)$ nicht abgeschlossen. Also existiert in jeder offene Umgebung U von $\gamma(p)$, Punkte von $\omega(x)$ die nicht in $\gamma(p)$ liegen. Weil $\omega(x)$ keine kritischer Punkte enthält, jede ausreichend kleine Umgebung U von $\gamma(p)$ enthält keine kritischen Punkte.

Sei $h \in \omega(x)$ die nicht in $\gamma(p)$ liegt und $j \in \gamma(p)$. Dan existiert es eine Transversal L' zu f die h oder j enthält. Das zeigt, dass $\omega(x) \cap L'$ enthält am mindestens zwei Punkte da $\gamma(p) \subset \omega(x)$, eine Widerspruch zu Übung 1.12. Daher gilt $\omega(x) = \gamma(p)$ und die ω-limus Menge von x ist ein periodischer Orbit.

□

Satz 2.2. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine C^1 Funktion. für der Fluss ϕ_t gegeben von der Differentialgleichung $x' = f(x)$. Falls die negative Semiorbit*

$$\gamma^-(x) = \{\phi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$$

von einer Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ ist beschränkt, und $\alpha(x)$ enthält keine kritische Punkte, dann $\alpha(x)$ ist einer periodische Orbit.

Proof. Dieser Beweis ist analog zum Beweis von 2.1, nur vertauscht mit dem negativer Semiorbit. □