Universität Mannheim

Seminararbeit

Ausgewählte Themen gewöhnlicher Differentialgleichungen und dynamischen Systemen

- Topologische Entropie -

Adrian Sadeghian

Lehrkraft

Prof. Dr. Martin Schmidt

29. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Diese Seminararbeit baut auf dem Buch "Dynamical Systems"von Luis Barreira und Claudia Valls auf, das eine Einführung in die grundlegenden Konzepte der Theorie von dynamischen Systemen bietet.

In dieser Seminararbeit werden die Abschnitte 3.4.1 und 3.4.2 des Kapitels 3.4 *Topologische Entropie* behandelt.

In Abschnitt 3.4.1 wird die Definition von topologischer Entropie auf zeitdiskreten dynamischen Systemen eingeführt. Wir beobachten, dass die topologische Entropie misst, wie ein Orbit eines dynamischen Systems sich bei vergehender Zeit verändert. Sie kann als das Maß für die Komplexität von dynamischen Systemen interpretiert werden. Um die Eigenschaften der topologischen Entropie zu festigen, werden diese an verschiedenen Beispielen illustriert.

Abschnitt 3.4.2 befasst sich mit dem Begriff der topologischen Invarianz und beweist, dass die topologische Entropie eine topologische Invariante ist.

2 Notationen und Beispiele

Sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung auf einem *kompakten* metrischen Raum X mit Abstand d. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir einen neuen Abstand auf X , als

$$d_n(x,y) = \max\{d(f^k(x), f^k(y)) : 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Definition 2.1 Die *topologische Entropie* von f ist definiert als

$$h(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \tfrac{1}{n} \log N(n,\epsilon),$$

wobei $N(n,\epsilon)$ die größte Anzahl an Punkten $p_1, ..., p_m \in X$ ist, sodass

$$d_n(p_i, p_j) \geq \epsilon \text{ für } i \neq j.$$

Korollar 2.2 $N(n,\epsilon)$ ist immer endlich.

Beweis: Sei $B_1, B_2, ...$ eine Überdeckung von X von offenen Bällen mit Radius $\frac{\epsilon}{2}$, im Abstand d_n. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $B_1^{‘}, ..., B_m^{‘}$ von X. Da all diese offenen Bälle eine Radius von $\frac{\epsilon}{2}$ haben, kann in jedem $B_1^{‘}, ..., B_m^{‘}$ nur höchstens ein Punkt $p_j \in N(n,\epsilon)$ liegen. Dies erkennen wir durch die Definition von $N(n,\epsilon)$ und der Dreiecksungleichung. Es folgt somit, $N(n,\epsilon) \leq m$.

□

Um das Verhalten der topologischen Entropie im Grenzwertprozess besser zu verstehen, werfen wir einen Blick auf die Funktion

$$\epsilon \mapsto \limsup_{n \to \infty} \tfrac{1}{n} \log N(n,\epsilon).$$

Wir erkennen, dass dies eine monoton fallende Abbildung ist, da für ein immer größer werdendes ϵ, $N(n,\epsilon)$ kleiner wird. Der Grenzwert $+\infty$ ist zugelassen, da, wenn das Infimum für kleine *Epsilon* $+\infty$ ist, der Grenzwert $+\infty$ ist. Falls das Infimum endlich ist, konvergiert die Funktion nach dem Monotonieprinzip.

Beispiel 2.3 Sei $R_\alpha : S^1 \to S^1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, eine Rotation auf dem Einheitskreis.

S^1 ist dabei definiert als $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim$, wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ ist. Die korrespondierenden Äquivalenzklassen $[x] = \{x + m : m \in \mathbb{Z}\}$, sind die Elemente von S^1.

Mit Hilfe dieser Definition, kann die Rotation dargestellt werden als,

$$R_\alpha([x]) = [x + \alpha].$$

Für die Distanz $d(x, y) = \min\{|x - y - m| : m \in \mathbb{Z}\}$ gilt demnach,

$$d(R_\alpha(x), R_\alpha(y)) = d(x, y) \text{ für } x, y \in S^1,$$

da wir die Rotation um den Winkel α auf dem Einheitskreis betrachten. Somit erkennen wir, dass $d_n = d_1 = d$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$h(R_\alpha) = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log N(1, \epsilon) = 0.$$

Dies gilt, da $N(1, \epsilon)$ eine natürliche Zahl ist und somit $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(1, \epsilon) = 0$. Intuitiv ist dieses Ergebnis konform mit der Interpretation der topologischen Entropie, als das Maß für die Komplexität dynamischer Systeme.

Beispiel 2.4 Wir betrachten nun die Abbildung $E_2 : S^1 \to S^1$,

$$E_2(x) = 2x \text{ mod } 1 \text{ und } E_2^q(x) = 2^q x \text{ mod } 1, \;\; x \in S^1 \text{ und } q \in \mathbb{N}.$$

Unser Ziel ist es, in diesem Beispiel, die topologische Entropie der expandierenden Abbildung E_2 zu berechnen.

Da wir gesehen haben, dass die Abbildung $\epsilon \mapsto \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(n, \epsilon)$ monoton fallend ist, ergibt sich für die topologische Entropie von E_2,

$$h(E_2) = \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log N(n, a_k),$$

für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ mit $a_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Wir wählen nun $a_k = 2^{-(k+1)}$. Im Folgenden zeigen wir, dass dann $N(n, 2^{-(k+1)}) = 2^{n+k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Um die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir beide Ungleichheiten. Wir beginnen mit "$\geq$":

Als erstes können wir beobachten falls $d(x,y) < 2^{-n}$, dann ist $d_n(x,y) = d(E_2^{n-1}(x), E_2^{n-1}(y)) = 2^{n-1}d(x,y)$. Warum gilt diese Gleichheit?

Aufgrund der Definition für E_2^q und der neuen Definition für d_n sehen wir, dass $d_n(x,y) = d(E_2^{n-1}(x), E_2^{n-1}(y))$, da der Abstand bezüglich der letzten, n-1-ten Iteration, maximal ist. Für $d(E_2^{n-1}(x), E_2^{n-1}(y)) = 2^{n-1}d(x,y)$ müssen wir uns daran erinnern, dass wir uns auf dem S^1 befinden und somit $\max\{d(x,y)\} = 2^{-1}$ ist. Wenn nun $d(x,y) < 2^{-n}$ ist, sehen wir, dass sich der Abstand mit jeder weiteren Iteration von E_2 verdoppelt. Da wir E_2 genau n-1 mal iterieren, erhalten wir die Gleichung $d(E_2^{n-1}(x), E_2^{n-1}(y)) = 2^{n-1}d(x,y)$.

Wir haben also gesehen, dass die obige Gleichheit gilt und können sie im Folgenden verwenden.

Als nächstes betrachten wir Punkte $p_i = \frac{i}{2^{n+k}}$ für $i = 0, ..., 2^{n+k} - 1$. Mit Hilfe der gerade gezeigten Gleichung stellen wir fest, dass

$$d_n(p_i, p_{i+1}) = 2^{n-1}2^{-(n+k)} = 2^{-(k+1)} \text{ für } i = 0, ..., 2^{n+k} - 1.$$

Da kein Punkt p_j zwischen p_i und p_{i+1} liegt, ist

$$d_n(p_i, p_j) \geq d_n(p_i, p_{i+1}) = 2^{-(k+1)} \quad \text{für } i \neq j.$$

Somit können wir folgern, dass

$$N(n, 2^{-(k+1)}) \geq 2^{n+k},$$

da es mindestens 2^{n+k} Punkte p_i, p_j gibt, für die wir wissen sie erfüllen $d_n(p_i, p_j) \geq 2^{-(k+1)}$ für $i \neq j$, es aber noch mehr geben könnte.

Nun zeigen wir "$\leq$":

Dafür sei $A \subset S^1$ mit Kardinalität von mindestens $2^{n+k} + 1$. Da $A \subset S^1$ ist es möglich die Menge in 2^{n+k} Intervalle zu unterteilen, die alle die Länge $2^{-(n+k)}$ haben. Da nun aber A eine Kardinalität von mindestens $2^{n+k} + 1$ hat, existieren Punkte $x, y \in A$ mit $x \neq y$, sodass $d(x,y) < 2^{-(n+k)}$. Es ist nämlich nicht möglich, dass auf jeder Intervallgrenze genau ein Punkt liegt, da sonst mehr als die Menge A überdeckt wäre.
Dies impliziert mit Hilfe der obigen Gleichung $d_n(x,y) = 2^{n-1}d(x,y)$ und $d(x,y) < 2^{-(n+k)} < 2^{-n}$, dass $d_n(x,y) < 2^{-(k+1)}$. Die Ungleichung folgt nun direkt, da für zwei Punkte $x, y \in A$ gilt, $d_n(x,y) < 2^{-(k+1)}$ und somit nur höchstens 2^{n+k} Punkt $w_i \in A$ die Bedingung $d_n(w_i, w_j) \geq 2^{-(k+1)}$, für $i \neq j$, erfüllen können.

Somit erhalten wir

$$N(n, 2^{-(k+1)}) \leq 2^{n+k}.$$

Wir haben nun beide Ungleichheiten gezeigt und können tatsächlich folgern, dass

$$N(n, 2^{-(k+1)}) = 2^{n+k} \text{ für } n, k \in \mathbb{N}.$$

Jetzt können wir die topologische Entropie von E_2 berechnen:

$$\begin{aligned} h(E_2) &= \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log N(n, a_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log 2^{n+k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \tfrac{n+k}{n} \log 2 = \log 2. \end{aligned}$$

3 Topologische Invarianz

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die topologische Entropie eine topologische Invariante ist. Zuerst definieren wir jedoch den Begriff Homöomorphismus, um im Folgenden die topologische Konjugation einzuführen.

Definition 3.1(Homöomorphismus) Sei $f : X \to X$ eine Abbildung auf einem topologischen Raum X, dann ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn gilt:

1. f ist stetig

2. f ist bijektiv

3. die Umkehrfunktion f^{-1} ist stetig

Definition 3.2 Wir nennen zwei Abbildungen $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$, auf zwei topologischen Räumen X und Y, *topologisch konjugiert*, falls ein Homöomorphismus $H : X \to Y$ existiert, sodass gilt

$$H \circ f = g \circ H.$$

Dann nennen wir H *topologische Konjugation*.

Anhand des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "H"'] & X \arrow[d, "H"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

können wir die Eigenschaft der topologischen Konjugation veranschaulichen und sehen, dass das Diagramm kommutiert.

Beispiel 3.3 Wir betrachten die Abbildung $f : R \to R, \quad z \mapsto z^2$ auf der Menge

$$R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

und die stetige Abbildung $H : S^1 \to R, \quad x \mapsto \exp(2\pi i x)$.

Wir können leicht sehen, dass H ein Homöomorphismus ist. Die Bijektivität folgt direkt aus der Funktionsvorschrift, da die Punkte auf dem Einheitskreis auf die Menge R abgebildet werden. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion, folgt auch die Stetigkeit von H.
Als Inverse von H können wir $H^{-1}(z) = \frac{argz}{2\pi} \mod 1$ identifizieren.

Wir haben dann

$$(f \circ H)(x) = f(\exp(2\pi ix)) = \exp(4\pi ix)$$

und

$$(H \circ E_2)(x) = H(2x) = \exp(4\pi ix).$$

Dies zeigt, dass $f \circ H = H \circ E_2$ und somit die Abbildungen f und E_2 topologisch konjugiert sind.

Wir nennen die topologische Entropie genau dann eine *topologische Invariante*, wenn sie dieselben Werte für topologisch konjugierte dynamische Systeme annimmt. Dies zeigen wir im folgenden Satz 3.4.

Satz 3.4 Seien $f : X \to X$ und $g : Y \to Y$ *stetige* Abbildungen auf *kompakten metrischen* Räumen X und Y. Falls f und g *topologisch konjugiert* sind, gilt $h(f) = h(g)$.

Beweis: Wir beginnen mit "$\geq$ ":

Sei dafür $H : X \to Y$ ein Homöomorphismus, sodass

$$H \circ f = g \circ H.$$

Da X,Y kompakte metrische Räume sind ist H gleichmäßig stetig. Es gilt somit,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ sodass } d_Y(H(x), H(y)) < \epsilon, \text{ wenn } d_X(x, y) < \delta.$$

d_Y und d_X sind dabei Abstände auf X und Y. Da nach Voraussetzung H eine topologische Konjugation von der Abbildung f nach g ist, ist H auch eine topologische Konjugation von f^m nach g^m, für $m \in \mathbb{N}$. Das können wir erkennen, da

$H \circ f = g \circ H \Rightarrow H \circ f \circ H^{-1} = g$

$\Rightarrow (HfH^{-1})(HfH^{-1})...(HfH^{-1}) = g^m$

$\Rightarrow Hf^mH^{-1} = g^m$

$\Rightarrow Hf^m = g^mH$, also

$$H(f^m(x)) = g^m(H(x)), \text{ für } m \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X.$$

Wir wählen nun $q_1, ..., q_m \in X$, sodass $\max\{d_Y(g^m(q_i), g^m(q_j)) : m = 0, ..., n-1\} \geq \epsilon$.

Wenn wir nun $p_i = H^{-1}(q_i)$ mit $p_i \in Y$ für alle $i \in \mathbb{N}$ definieren, sehen wir, dass

$max\{d_Y(g^m(q_i), g^m(q_j)) : m = 0, ..., n-1\} = \max\{d_Y(g^m(H(p_i)), g^m(H(p_j))) : m = 0, ..., n-1\}$, da H ein Homöomorphismus ist und somit eine Umkehrfunktion existiert.

Zu dem gilt, aufgrund der topologischen Konjugiertheit von f und g, dass

$\max\{d_Y(g^m(H(p_i)), g^m(H(p_j))) : m = 0, ..., n-1\}$

$= \max\{d_Y(H(f^m(p_i)), H(f^m(p_j)) : m = 0, ..., n-1\} \geq \epsilon$,

für $i \neq j$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt mit der gleichmäßigen Stetigkeit von H, dass

$$\max\{d_X(f^m(p_i), f^m(p_j) : m = 0, ..., n-1\} \geq \delta$$

für $i \neq j$ und $n \in \mathbb{N}$.
Wir nutzen in diesem letzten Schritt die logische Äquivalenz der Negation:

$d_X(f^m(p_i), f^m(p_j)) < \delta \Rightarrow d_Y(H(f^m(p_i)), H(f^m(p_j)) < \epsilon \Leftrightarrow$

$d_Y(H(f^m(p_i)), H(f^m(p_j)) \geq \epsilon \Rightarrow d_X(f^m(p_i), f^m(p_j)) \geq \delta$.

Wenn wir uns an die Definitionen von $N_f(n, \delta)$ und $N_g(n, \epsilon)$ erinnern, sehen wir

$$N_f(n, \delta) \geq N_g(n, \epsilon).$$

Warum gilt diese Ungleichung? Wir beginnen von Rechts mit $N_g(n, \epsilon)$. Dies ist die maximale Anzahl an Punkten $q_1, ..., q_m \in X$, sodass $d_{g,n}(q_i, q_j) \geq \epsilon$. Für jede beliebige Wahl von Punkten $q_1, ..., q_m \in X$, können wir Punkte $p_1, ..., p_m \in Y$ konstruieren, durch $H^{-1}(q_1) = p_1, ..., H^{-1}(q_m) = p_m \in Y$. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von H, der logischen Äquivalenz der Negation und der topologischen Konjugiertheit von f und g gilt: $d_{g,n}(q_i, q_j) = d_{g,n}(H(p_i), H(p_j)) \geq \epsilon \Rightarrow d_{f,n}(p_i, p_j) \geq \delta$.

Daraus folgt, dass $N_f(n, \delta)$ nicht kleiner ist als $N_g(n, \epsilon)$, da wir für jede maximale Anzahl an Punkten $q_1, ..., q_m$, die $d_{g,n}(q_i, q_j) \geq \epsilon$ erfüllen, dieselbe Anzahl an Punkten $p_1, ..., p_m$ finden können, die $d_{f,n}(p_i, p_j) \geq \delta$ erfüllen. Es folgt die obige Ungleichung.

Aus $N_f(n, \delta) \geq N_g(n, \epsilon)$ folgt sofort,

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log N_f(n, \delta) \geq \limsup_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log N_g(n, \epsilon), \text{ für jedes } \epsilon > 0,$$

aufgrund der Monotonie des Limes Superior. Aus der obigen Definition der gleichmäßigen Stetigkeit können wir abschließend noch folgern, dass wenn $\epsilon \to 0$ auch $\delta \to 0$. Wir erhalten damit die Definition der topologischen Entropie von f und g und somit ist,

$$h(f) \geq h(g).$$

"$\leq$":

Wenn wir nun die Eigenschaft des Homöomorphismus H nutzen und $H \circ f = g \circ H$ zu $H^{-1} \circ g = f \circ H^{-1}$ umschreiben, erhalten wir für H^{-1} und den oben angeführten Argumenten, dass $h(g) \geq h(f)$. Es folgt somit die Aussage,

$$h(f) = h(g).$$

$\square$

Beispiel 3.5 Wir haben in Beispiel 3.3 gesehen, dass f und E_2 topologisch konjugiert sind. Es folgt nun direkt mit Satz 3.4,

$$h(f) = h(E_2) = \log(2).$$

4 Quellen

1. *[Barreira, Valls 2013]* Barreira, Luis ; Valls, Claudia: *Dynamical Systems* Springer-Verlag London 2013