eine Seminararbeit zu topologischer Dynamik

von Kenny Tran

27. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Nehme für diese Seminararbeit an, dass (X, d) ein metrischer Raum sei und $f : X \to X$ ist.

1 ω-Limesmengen

<u>Definition 1.1</u>
Sei $x \in X$.
Man setzt nun $\omega_f(x) := \{z \in X \mid$ Es existiert eine natürliche Zahlenfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ...
... $+\infty$ divergiert, mit $\lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = z\}$ und nennt $\omega_f(x)$ die ω-Limesmenge von x bezüglich f.

<u>Satz 1.2</u>
Sei $x \in X$.
Dann ist $\omega_f(x) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}\}}$.

<u>Beweis:</u>

„$\supseteq$"

Sei $y \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}\}}$.
Setze zusätzlich zu dem $A_m := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}\}\ \forall m \in \mathbb{N}$.
Führe nun eine Fallunterscheidung für y bezüglich der Ausprägung seiner Elementbeziehung zu $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ durch:

<u>Fall 1:</u> $y \notin \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$

In diesem Fall existiert eine natürliche Zahl p mit $y \notin A_p$.
Zusätzlich dazu, dass $y \notin A_p$ ist, ist $y \in \overline{A_p}$, denn $y \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{A_m}$.

Folglich ist $y \in \overline{A_m} \setminus A_m$. Dies impliziert nun die Existenz einer natürlichen Zahlenfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $+\infty$ divergiert, mit $\lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k} = y$ und somit ist $y \in \omega_f(x)$.

<u>Fall 2:</u> $y \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$

Zunächst ist in diesem Fall $y \in A_1$. Da per definitionem $A_1 = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist, folgt hierraus die Existenz einer natürlichen Zahl p mit $f^p(x) = y$.

Zusätzlich dazu, dass $f^p(x) = y$ ist, ist $y \in A_{p+1}$, weil $y \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ ist.

Folglich existiert eine natürliche Zahl q mit $q > p$ und $f^q(x) = y$.
Setze $n_k := (q - p)k + p\ \forall k \in \mathbb{N}$.
$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nun divergent gegen $+\infty$, da $q > p$ ist.

Das Ziel ist jetzt, zu zeigen, dass $f^{n_k}(x) = y$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$. Ist dies nämlich der Fall, so ist $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen y und zusammen mit der Divergenz von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ impliziert dies, dass $y \in \omega_f(x)$ ist.
Setze an mit natürlicher Induktion:

<u>Induktionsanfang</u>
Es gilt $f^{n_1} = f^{q-1+1}(x) = f^q(x) = y$.

<u>Induktionsannahme und Induktionsschluss</u>
Nehme an, es gelte $f^{n_k}(x) = y$ für eine natürliche Zahl k. Dann gilt

$$f^{n_{k+1}} = f^{(q-p)(k+1)+p}(x) = f^{(q-p)+(q-p)k+p}(x) = f^{(q-p)}(f^{(q-p)k+p}(x)) = f^{(q-p)}(f^{n_k}(x)) \overset{Ann.}{=} f^{(q-p)}(y) = f^{(q-p)}(f^p(x)) = f^{q-p+p}(x) = f^q(x) = y.$$

Es gilt also $f^{n_k}(x) = y$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und somit ist $y \in \omega_f(x)$.

Demnach ist $y \in \omega_f(x)$

„$\subseteq$“

Sei $y \in \omega_f(x)$.
Nun existiert eine natürliche Zahlenfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, bei der $n_k \to +\infty$ geht für $k \to +\infty$, mit $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y$.

Nehme jetzt noch an, dass $m \in \mathbb{N}$ sei. Unter dieser Annahme existiert eine natürliche Zahl l, sodass $f^{n_k}(x) \in A_m$ $\forall k \in \mathbb{N}_{k\geq l}$ ist. Somit ist $(f^{n_{k+(l-1)}}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A_m. Zusätzlich zu dem konvergiert sie gegen y für $k \to +\infty$, weil sie eine Teilfolge von $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist und $f^{n_k}(x) \to y$ für $k \to +\infty$. Folglich ist $y \in \overline{A_m}$, denn $\overline{A_m}$ ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen in A_m.
D.h. $y \in \overline{A_m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ und dies impliziert, dass $y \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m$ ist.

q.e.d.

<u>**Definition 1.3**</u>
Sei $x \in X$.
Man setzt nun $\gamma_f^+(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ und nennt $\gamma_f^+(x)$ den positiven Semiorbit von x bezüglich f.
Falls f zusätzlich noch invertierbar ist, setzt man $\gamma_f^-(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}_{<0}\}$ und bezeichnet $\gamma_f^+(x)$ als den positiven Semiorbit von x bezüglich f.
Außerdem setzt man bei Invertierbarkeit von f $\gamma_f(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und nennt $\gamma_f(x)$ den Orbit von x bezüglich f.

Satz 1.4
Sei f stetig und nehme an, es existiere ein Element x von X, bei dem $\overline{\gamma_f^+(x)}$ kompakt ist.
Dann gilt:

- $\omega_f(x)$ ist nichtleer. (1)
- $\omega_f(x)$ ist kompakt. (2)
- $\inf\{d(f^n(x), y) \mid y \in \omega_f(x)\} \to 0$ für $n \to +\infty$. (3)

Beweis:

„(1)“

$(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\gamma_f^+(x)$. Zusätzlich zu dem ist ...
... $\gamma_f^+(x) \subseteq \overline{\gamma_f^+(x)}$.
... $\overline{\gamma_f^+(x)}$ nach Annahme kompakt.

Folglich ist $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, dessen Glieder alle in einer kompakten Menge enthalten sind. Dies impliziert die Existenz einer konvergenten Teilfolge von $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Per definitionem gibt es eine streng monoton wachsende Folge von natürliche Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = f^{n_k}(x)\ \forall k \in \mathbb{N}$. $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist also eine konvergente Folge.

Ferner ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine natürliche Zahlenfolge bei der $n_k \to +\infty$ für $k \to +\infty$, da sie streng monoton wachsend ist. Folglich ist $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) \in \omega_f(x)$ und somit ist $\omega_f(x)$ nichtleer.

„(2)“

Zunächst ist $\overline{\gamma_f^+(x)}$ nach Annahme kompakt.
Zusätzlich zu dem gilt $\omega_f(x) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}} \subseteq \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0}$
$= \overline{\gamma_f^+(x)}$. D.h. $\omega_f(x) \subseteq \overline{\gamma_f^+(x)}$.
Ferner ist $\omega_f(x)$ abgeschlossen, denn $\omega_f(x) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq m}\}}$, Mengenabschlüsse sind abgeschlossen und Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
Folglich ist $\omega_f(x)$ eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge und somit selbst kompakt.

„(3)“

Setze $a_n := \inf\{d(f^n(x), y) \mid y \in \omega_f(x)\}\ \forall n \in \mathbb{N}$ und nehme an, dass $a_n \not\to 0$ für $n \to +\infty$.
Das Ziel ist jetzt, aus dieser Annahme einen Widerspruch zu folgern.

Wegen der Annahme existiert zunächst eine positive reelle Zahl δ, für die es keine natürliche Zahl N gibt mit $|a_n| < \delta\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}$. Folglich gibt es eine streng monoton steigende Folge von natürlichen Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{n_k}| \geq \delta\ \forall k \in \mathbb{N}$.

$(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\gamma_f^+(x)$ und somit inbesondere eine Folge in $\overline{\gamma_f^+(x)}$. Zusätzlich zu dem ist $\overline{\gamma_f^+(x)}$ nach Annahme kompakt. Also hat $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Da, wie zuvor erwähnt, $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$ ist, ist auch $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$ und somit muss gibt es eine streng monotone steigende Folge von natürlichen Zahlen $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f^{m_k}(x) = b_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $\lim\limits_{k\to\infty} b_k \in \omega_f(x)$ (I).

$(f^{m_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(f^{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$, da $f^{m_k}(x)_{k\in\mathbb{N}} = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Also ist $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dies impliziert, dass $|a_{m_k}| \geq \delta$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ und daraus folgt $(d(f^{m_k}(x), y) \geq \delta \ \forall k \in \mathbb{N}, y \in \omega_f(x))$, denn per definitionem ist $a_{m_k} = \inf\{d(f^{m_k}(x), y) \mid ...$
$... \ y \in \omega_f(x)\} \ \forall k \in \mathbb{N}$. Für eine beliebige Belegung von y aus $\omega_f(x)$ gilt somit

$$0 < \delta \leq \lim_{k\to\infty} d(f^{m_k}(x), y) = d(\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x), y) = d(\lim_{k\to\infty} b_k, y) \ .$$

D.h. $d(\lim\limits_{k\to\infty} b_k, y) > 0 \ \forall y \in \omega_f(x)$ (II).

II steht nun im Widerspruch mit I. Folglich muss die Annahme, dass $a_n \not\to 0$ für $n \to +\infty$ falsch sein und somit gilt $\inf\{d(f^n(x), y) \mid y \in \omega_f(x)\} \to 0$ für $n \to +\infty$.

q.e.d.

Definiton 1.5
Sei $M \subseteq X$. Man bezeichnet M nun als f-vorwärtsinvariant, genau dann, wenn $f[M] \subseteq M$ ist.

Satz 1.6
Seien f stetig und $x \in X$. Dann ist $w_f(x)$ f-forwärtsinvariant.

Beweis:
Sei $y \in \omega_f(x)$.
Nun existiert eine natürliche Zahlenfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, bei der $n_k \to +\infty$ für $k \to \infty$, mit $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y$.

Es gilt $f(y) = f(\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(f^{n_k}(x))) = \lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k+1}(x)$.

D.h. $(f^{n_k+1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $f(y)$. Ferner ist $(n_k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ eine natürliche Zahlenfolge, die divergent ist gegen $+\infty$, da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge ist. Also ist $f(y) \in \omega_f(x)$.

Folglich ist $f(y) \in \omega_f(x)$ $\forall y \in \omega_f(x)$. Dies impliziert, dass $f[\omega_f(x)] \subseteq \omega_f(x)$ ist und somit ist $\omega_f(x) f$-vorwärtsinvariant.

q.e.d.

Definiton 1.7
Sei $x \in X$. Man nennt x jetzt einen wiederkehrenden Punkt von f, genau dann, wenn $x \in \omega_f(x)$ ist. Setze zusätzlich zu dem $R(f) := \{z \in X \mid z \text{ ist ein wiederkehrender Punkt von } f\}$.

Satz 1.10
Sei f stetig. Dann ist $R(f)$ f-vorwärtsinvariant.

Beweis:
Sei $y \in R(f)$.
Per definitionem ist nun $y \in \omega_f(y)$. Demnach existiert eine natürliche Zahlenfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, bei der $n_k \to +\infty$ für $k \to \infty$, mit $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(y) = y$.

Es gilt $f(y) = f(\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(y)) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(f^{n_k}(y))) = \lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(f(y))$.

D.h. $(f^{n_k}(f(y)))_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $f(y)$. Hierraus folgt, dass $f(y) \in \omega_f(f(y))$ ist, weil $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wie zuvor erwähnt, divergent ist gegen $+\infty$. Also ist $f(y) \in R(f)$.

Folglich ist $f(y) \in R(f)$ $\forall y \in R(f)$. Dies impliziert, dass $f[R(f)] \subseteq R(f)$ ist und somit ist $R(f)$ f-vorwärtsinvariant.

q.e.d.

2 topologisch transitive Funktionen

Definition 2.1
Man bezeichnet f als topologisches dynamisches System zu X in diskreter Zeit, genau dann, wenn f stetig ist.

Definition 2.2
Sei f ein topologisches dynamisches Systen zu X in diskreter Zeit.
Man nennt f jetzt topologisch transtiv, genau dann, wenn es $\forall O, U$, für die O und U nichtleere offene Teilmengen von X sind, eine natürliche Zahl n gibt mit $f^{-n}[U] \cap O \neq \emptyset$.

Satz 2.3, der Satz von Baire
Sei (X, d) lokalkompakt.
Dann ist ein Durchschnitt von Teilmengen von X, die dicht in X liegen und offen sind, immer auch dicht in X.

Beweis: Siehe Boto von Querenburg: Mengentheoretische Topologie (3. Auflage) Seite 173-174

Definition 2.4
Sei B eine Menge von offenen Teilmengen von X.
Man bezeichnet B nun als Basis von (X, d) genau dann, wenn es $\forall O$, für die O eine offene Teilmenge von X ist, eine Menge I und eine zugehörige Mengenfamilie in B, $(B_k)_{k\in I}$, gibt mit $O = \bigcup\limits_{k\in I} B_k$.

Lemma 2.5
Sei (X, d) frei von isolierten Punkten, U eine nichtleere offene Teilmenge von X und V eine Teilmenge von X, die dicht in X liegt. Dann enthält $V \cap U$ unendlich viele verschiedene Elemente.

Beweis:

Zunächst ist $V \cap U \neq \emptyset$, da V dicht in X liegt und U offen ist. $V \cap U$ hat also Elemente.
Sei $a \in V \cap U$.
Nun existiert eine positive reelle Zahl ϵ mit $B_\epsilon(a) \subseteq U$, weil $a \in U$ und U offen ist.
Da (X, d) frei von isolierten Punkten ist, existiert ein Element von $B_\epsilon(a)$, b_1, mit $b_1 \neq a$.
Also hat $B_\epsilon(a)$ zwei verschiedene Elemente, b_1 und a.
Es existiert eine positive reelle Zahl δ_1 mit $B_{\delta_1}(b) \subseteq U$, denn $b_1 \in U$, weil $B_\epsilon(a) \subseteq U$ ist.

Folglich gilt $\quad B_{min\{\delta_1, d(a,b_1)\}(b_1)} \begin{cases} \subseteq U \\ \not\ni a \end{cases}$

Da (X, d) frei von isolierten Punkten ist, existiert ein Element von $B_{min\{\delta_1, d(a,b_1)\}(b_1)}$, b_2, mit $b_1 \neq b_2$.

Die Argumentation ab Zeile 4 lässt sich analog auf b_2 anwenden und liefert ein Element von $V \cap U$, b_3, mit $b_3 \neq b_2$ und $b_3 \neq a$.

...

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nun eine Folge von verschiedenen Elementen von $V \cap U$ und somit hat $V \cap U$ unendlich viele verschiedene Elemente.

q.e.d.

Satz 2.6

Seien (X, d) lokalkompakt mit abzählbarer Basis und f ein topologisches dynamisches System zu X in diskreter Zeit. Dann gilt:

- Ist f topologisch transitiv, so existiert ein Element von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt. (1)
- Falls X keine isolierten Punkte besitzt und ein Element von X existiert, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt, ist f topologisch transitiv. (2)

Beweis:

„(1)"

Nehme zuerst einmal an, f sei topologisch transitiv.
Seien zusätzlich zu dem $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von (X, d) und $j \in \mathbb{N}$.
Unter der Annahme, dass O eine nichtleere offene Teilmenge von X ist, gilt nun
$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]) \cap O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f^{-n}[U_j]) \cap O) \neq \emptyset.$

f ist topologisch transitiv. Folglich existiert eine natürliche Zahl N mit $f^{-N}[U_j] \cap O \neq \emptyset$. Ferner ist $f^{-N}[U_j] \cap O \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f^{-n}[U_j]) \cap O)$. Also gilt die Ungleichheit.

D.h. $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j] \cap O \neq \emptyset \; \forall O$, für die O eine nichtleere offene Teilmenge von X ist.

Dies impliziert nun, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$ dicht in X liegt.

Des Weiteren ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$ offen, denn Vereinigungen offener Mengen sind immer

selbst offen und aufgrund der Stetigkeit von f und der Offenheit von U_j ist $f^{-n}[U_j]$ offen $\forall n \in \mathbb{N}$.

Folglich ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$ dicht in X und offen $\forall j \in \mathbb{N}$. Mit dem Satz von Baire folgt hierraus,

dass $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j])$ dicht in X liegt, und zusammen mit der angenommenen Nichtleere von X impliziert dies, dass $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$ nichtleer ist. $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$ hat also Elemente.

Sei $x \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$.

Nun ist $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_i]\ \forall i \in \mathbb{N}$. Demnach existiert für eine beliebige natürliche Zahl l eine natürliche Zahl m mit $x \in f^{-m}[U_l]$. Somit ist $f^m(x) \in U_l$.
Da zusätzlich zu dem $f^m(x) \in \gamma_f^+(x)$ ist folgt, dass $f^m(x) \in \gamma_f^+(x) \cap U_l$ ist.

Also ist $f^m(x) \in \gamma_f^+(x) \cap U_l \quad \forall x \in \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$.

Zusammen mit der Nichtleere von $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}[U_j]$, die zuvor gezeigt wurde, impliziert dies die Nichtleere von $\gamma_f^+(x) \cap U_l$. Folglich ist $\gamma_f^+(x) \cap U_l$ nichtleer für eine beliebige natürliche Zahl l.

Nehme nun an B sei eine offene Teilmenge von X.
Unter dieser Annahme existiert eine Teilmenge der natürlichen Zahlen K mit $B = \bigcup\limits_{k\in K} U_k$.
Demnach gilt $\quad \gamma_f^+(x) \cap B = \gamma_f^+(x) \cap (\bigcup\limits_{k\in K} U_k) = \bigcup\limits_{k\in K} \underbrace{(\gamma_f^+(x) \cap U_k)}_{\neq\emptyset} \neq \emptyset$.

Also ist $\quad \gamma_f^+(x) \cap B \neq \emptyset \quad \forall B$, für die B eine offene Teilmenge von X ist und folglich liegt $\gamma_f^+(x)$ dicht in X.
Somit existiert ein Element von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt, falls f topologisch transitiv ist.

„(2)“

Nehme zunächst an, dass X keine isolierten Punkte besitzt und, dass ein Element von X, x, existiert, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt.
Seien zusätzlich zu dem U und V nichtleere offene Teilmengen von X.

Nach Lemma 2.5 enthalten nun $\gamma_f^+(x)\cap U$ und $\gamma_f^+(x)\cap V$ unendlich viele verschiedene Elemente.
Folglich existieren natürliche Zahlen m und n mit $m > n$, $f^m(x) \in U$ und $f^n(x) \in V$.

Es gilt $(f^m(x) \in U \wedge f^n(x) \in V) \Leftrightarrow (x \in f^{-m}[U] \wedge x \in f^{-n}[V]) \Leftrightarrow (x \in f^{-m}[U] \cap f^{-n}[V])$.
Also ist $x \in f^{-m}[U] \cap f^{-n}[V]$.

Des Weiteren gilt $f^{-m}[U] \cap f^{-n}[V] \overset{m\geq n}{=} f^{-n}[f^{-(m-n)}[U]] \cap f^{-n}[V] = f^{-n}[f^{-(m-n)}[U] \cap V]$.

Demnach ist $x \in f^{-n}[f^{-(m-n)}[U] \cap V]$ und dies impliziert, dass $f^n(x) \in f^{-(m-n)}[U] \cap V$ ist.
Somit gilt $f^{-(m-n)}[U] \cap V \neq \emptyset$.

D.h. $f^{-(m-n)}[U] \cap V \neq \emptyset\ \forall U, V$, für die U und V nichtleere offene Teilmengen von X sind und folglich ist f topologisch transitiv.
Also ist f topologisch transitiv, wenn X keine isolierten Punkte besitzt und ein Element von X existiert, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt.

q.e.d.

Satz 2.7

Seien (X, d) lokalkompakt mit abzählbarer Basis und ohne isolierte Punkte und f ein topologisches dynamisches System zu X in diskreter Zeit, dass invertierbar ist.
Dann existiert ein Element von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt, falls es ein Element von X gibt, dessen Orbit bezüglich f dicht in X liegt.

Beweis:

Nehme zunächst an, dass ein Element von X, x, existiert, dessen Orbit bezüglich f in X liegt.
Nach Lemma 2.5 enthält nun $\gamma_f^+(x) \cap U$ unendliche viele verschiedene Elemente $\forall U$, für die U eine Umgebung von x ist.
Folglich existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei der $|a_n| \to +\infty$ für $n \to +\infty$, mit $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{a_n}(x) = x$.
Da $|a_n| \to +\infty$ für $n \to +\infty$, hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per definitionem abzählbar unendlich viele positive reelle Zahlen. Somit muss eine der folgenden zwei Aussagen wahr sein:

- $a_n > 0$ für abzählbar unendlich viele Belegungen von n aus $\mathbb{N}$. (I)
- $a_n < 0$ für abzählbar unendlich viele Belegungen von n aus $\mathbb{N}$. (II)

Das Ziel ist jetzt, zu zeigen, dass I und II separat die Existenz eines Elements von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt, implizieren. Schafft man dies nämlich, so ist die Existenz eines solchen Elements von X garantiert.

„I $\Rightarrow$ “

Nehme an, I sei wahr.
Sei zusätzlich zu dem $m \in \mathbb{Z}$.
Wegen den Gültigkeit von I existiert nun eine natürliche Zahl N mit $a_n + m \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}$.
Demnach ist $(f^{a_{n+(N-1)}+m}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$.
Zusätzlich zu dem gilt $f^m(x) = f^m(\lim\limits_{n\to+\infty} f^{a_n}(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^m(f^{a_n}(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{a_n+m}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{a_{n+(N-1)}+m}(x)$.
Also ist $(f^{a_{n+(N-1)}+m})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$, die gegen $f^m(x)$ konvergiert.
Folglich gibt es $\forall m \in \mathbb{Z}$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$, die gegem $f^m(x)$ konvergiert. Dies impliziert, dass es $\forall z \in \gamma_f(x)$ eine Folge in $\gamma_f^+(x)$ gibt, die gegen z konvergiert und demnach liegt $\gamma_f^+(x)$ dicht in $\gamma_f(x)$.
Zusätzlich zu dem liegt $\gamma_f(x)$ dicht in X. Also ist $\gamma_f^+(x)$ dicht in X.

„II $\Rightarrow$ “

Nehme an, II sei wahr. Analoge Argumentation zum Beweis der Existenz eines Elements von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt, wenn I wahr ist, liefert nun, dass $\gamma_f^-(x)$ dicht in X liegt. Hierraus folgt mit analoger Argumentation zum Beweis von Satz 2.6 (2), dass f topologisch transitiv ist und somit gibt es nach Satz 2.6 (1) ein Element von X, dessen positiver Semiorbit bezüglich f dicht in X liegt. q.e.d.

3 topologisch mischende Funktionen

Definition 3.1
Sei f ein topologisches dynamisches System zu X in diskreter Zeit.
Man bezeichnet f nun als topologisch mischend genau dann, wenn es $\forall O, U$, für die O und U nichtleere offene Mengen in (X, d) sind, eine natürliche Zahl N gibt mit $f^{-n}[U] \cap O \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\leq N}$.

Bemerkung 3.2
Ist f topologisch mischend, so ist f auch topologisch transitiv.