Zeitkontinuierliche dynamischen Systeme

Volodimir Benderevgenenko

15. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einführung

0.1.1 Erste Definitionen

Definition1:

Ein **Halbfluss** ist eine Familie von stetigen Abbildungen $\varphi_t : X \to X$ für $t \geq 0$, so dass $\varphi_0 = Id$ und $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \; \forall t, s \geq 0$ gilt.

Eine Familie von stetigen Abbildungen $\varphi_t : X \to X$ für $t \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi_0 = Id$ und $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s \; \forall t, s \in \mathbb{R}$, nennt man **Fluss**.

Dann sagt man, dass eine Familie von Abbildungen φ_t ein **zeitkontinuierliches dynamisches System** ist, wenn es ein Fluss oder Halbfluss ist.

Wenn φ_t ein Fluss ist, dann gilt, dass $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = Id$, und daraus folgt, dass φ_t invertierber ist, und somit ist die Inverse dann $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

0.1.2 Das Beispiel für zeitkontinuierliche dynamische Systeme: Autonome Differentialgleichungen

Autonome Differentialgleichungen sind gewöhnliche Differentialgleichung, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Mit einer Proposition kann man das umgehen.

Proposition1: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion, so dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

existiert. Diese ist dann $x(t, x_0)$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist die Familie von Abbildungen $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ \forall t \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ ein Fluss.

Beweis:

Sei $s \in \mathbb{R}$. Man definiere ein Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = x(t + s, x_0).$$

Man hat $y(0) = x(s, x_0)$ und

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t))$$

für $t \in \mathbb{R}$. In anderen Worten, die Funktion y ist die Lösung der Gleichung $x' = f(x)$.

Von der Voraussetzung wird angenommen, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung besizt. Man bekommt

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0)) \Longleftrightarrow x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$$

für $t, s \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Aus dieser Äquivalenz folgt, dass $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

Weiter gilt, $\varphi_0 = x(0, x_0) = x_0$, d.h. $\varphi_0 = Id$.

Damit ist die Familie von Abbildungen φ_t ein Fluss.

□

Beispiel für eine autonome Differentialgleichung:

Man betrachte diese gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

Wenn $(x, y) = (x(t), y(t))$ ist eine Lösung, dann

$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = -2xy + 2yx = 0.$$

Damit existiert eine Konstante $r \geq 0$, so dass $x^2(t) + y^2(t) = r^2$.

In Polarkoordinaten

$$x(t) = r \cos \theta(t)$$

und

$$y(t) = r \sin \theta(t),$$

wobei θ eine differenzierbare Funktion ist, das folgt aus der Identität $x' = -y$, so dass

$$-r\theta'(t) \cdot \sin \theta(t) = -r \sin \theta(t).$$

Also ist $\theta'(t) = 1$ und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\theta(t) = t + c$.

Dann schreibt man $(x_0, y_0) = (r \cos c, r \sin c) \in \mathbb{R}^2$

Man erhält

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t+c) \\ r\sin(t+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cdot r\cos c - \sin t \cdot r \sin c \\ \sin t \cdot r \cos c + \cos t \cdot r \sin c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ nennt man Rotationsmatrix $\forall t \in \mathbb{R}$.

Es gilt $R(0) = Id$ und mit Proposition1 folgt, dass die Familie von Abbildungen $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert als $\varphi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, ist ein Fluss. Insbesondere ist die Identität $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ äquivalent zu der Eigenschaft der Rotationsmatrix

$$R(t+s) = R(t) \cdot R(s)$$

0.1.3 Invariante Mengen

Definition2:

Sei ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf X, dann heißt eine Menge $A \subseteq X$
$\Phi - invariant$, wenn $\varphi_t^{-1}(A) = A$ für $t \in \mathbb{R}$.
Sei ein Halbfluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ auf X, dann heißt eine Menge $A \subseteq X$
$\Phi - invariant$, wenn $\varphi_t^{-1}(A) = A$ für $t \geq 0$.

In dem Fall eines Flusses gilt $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ für $t \in \mathbb{R}$ und die Menge $A \subseteq X$ heißt $\Phi - invariant$ dann und nur dann, wenn $\varphi_t(A) = A$ für $t \in \mathbb{R}$.

Definition3:

Für ein Halbfluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ auf X sei der Punkt $x \in X$ gegeben, dann heißt die Menge $\gamma^+(x) = \gamma_\Phi^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}$ der **positive Semiorbit** von x.

Weiter für ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf X definiert man den
negativen Semiorbit $\gamma^-(x) = \gamma_\Phi^-(x) = \{\varphi_{-t}(x) : t \geq 0\}$ von x und
den **Orbit** $\gamma(x) = \gamma_\Phi(x) = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ von x.

0.2 Topologische Dynamik

0.2.1 Begriff des topologischen Flusses

Definition4:

Wenn für einen beliebigen Fluss (bzw. Halbfluss) $\varphi_t : X \to X$ gilt, dass die Abbildung $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ stetig ist in $\mathbb{R} \times X$ (bzw. $\mathbb{R}_0^+ \times X$), dann heißt er **topologischer Fluss**(bzw. **topologischer Halbfluss**).

Jeden beliebigen topologischen Fluss (oder Halbfluss) nennt man **topologisches, zeitkontinuierliches dynamisches System** .

Die Annahme der Kontinuietät impliziert, dass jede Abbildung $\varphi_t : X \to X$ steti ist (in dem Fall von Flussen ist das jeder Homöomorphismus).

Beispiel:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine global Lipschitz-stetige Funktion, d.h. es gibt eine Konstante $L \geq 0$, so dass $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zusätzlich soll gelten, dass $f(0) = 0$.

Man betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

welches eine eindeutige Lösung $x(t,x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt.

Aus $x(t,x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(s,x_0))ds$ folgt, dass

$$\|x(t,x_0)\| \le \|x_0\| + |\int_0^t \|f(x(s,x_0))\|ds| \le \|x_0\| + L|\int_0^t \|x(s,x_0)\|ds|.$$

$\lceil$ **Das Lemma von Gronwall**:

Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $v \ge 0$, so dass

$$u(t) \le c + \int_a^t u(s)v(s)ds$$

für $t \in [a,b]$.

Dann gilt, dass

$$u(t) \le c \cdot e^{\int_a^t v(s)ds}$$

für $t \in [a,b]$.

$\rfloor$

Im gegebenen Beispiel ist $v(s) = L$. Mit dem Lemma von Gronwall erhält man $\|x(t,x_0)\| \le \|x_0\| \cdot e^{L\cdot|t|}$ für t aus dem Definitionsbereich der Lösung. Das impliziert, dass die Lösung $\varphi_t(x_0) = x(t,x_0)$ für $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Das heißt, dass die Lösung für alle Zeiten endlich ist. Aus der stetigen Äbhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit Anfangswertbedingung folgt, dass der Fluss $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein topologisches, zeitkontinuierliches dynamisches System.

0.2.2 Limes-Mengen und Grundeigenschaften

Man definiert die Mengen $\alpha - limes$ und $\omega - limes$ für zeitkontinuierliche dynamische Systeme. Diese Mengen haben Informationen über den asymptotischen Verhalten jedes Orbits.

Definition5:

Sei der Halbfluss $\Phi = (\varphi_{t)})_{t\ge 0}$ auf X gegeben, dann heißt die Menge $\omega - limes$ **von einem Punkt** $x \in X$, wenn

$$\omega(x) = \omega_\Phi(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi_s(x) : s > t\}}.$$

Für ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf X heißt die Menge $\alpha - limes$ von einem Punkt $x \in X$, wenn

$$\alpha(x) = \alpha_\Phi(x) = \bigcap_{t<0} \overline{\{\varphi_s(x) : s < t\}}.$$

Proposition2: Sei ein Halbfluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\ge 0}$ auf X, dann gelten $\forall x \in X$ folgende Eigenschaften:

1.) $y \in \omega(x)$ genau dann, wenn es eine Folge $t_k \nearrow +\infty$ aus $\mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\varphi_{t_k}(x) \longrightarrow y$ für $k \longrightarrow \infty$.

2.)Wenn Φ ein topologischer Halbfluss ist, dann ist $\omega(x)$ vorwärts $\Phi - invariant$.

Beweis: Geht analog zum diskretem Fall.

$\square$

Proposition3: Sei ein topologischer Halbfluss $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ aus X gegeben. Wenn der positive Semiorbit $\gamma^+(x)$ von einem Punkt $x \in X$ einen kompakten Abschluss hat, dann gelten folgende Eigenschaften:

1.) $\omega(x)$ ist kompakt, zusammenhängend und nichtleer.

2.)$\inf \{d(\varphi_t(x), y) : y \in \omega(x)\} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow +\infty$.

Definition6:

Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die einziegen Teilmengen von X, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, die leere Menge und der ganze Raum X sind.

Beweis von Proposition3:

1.) Wegen der Definition von $\omega(x)$ ist $\omega(x)$ abgeschlossen. Also gilt, dass $\omega(x) \subseteq \overline{\gamma^+(x)}$. Der Abschluss von einem Semiorbit $\gamma^+(x)$ ist kompakt, also ist auch $\omega(x)$ kompakt. Man betrachte die Folge $\varphi_t(x)$ aus der kompakten Menge $\overline{\gamma^+(x)}$ von einem metrischen Raum X, die eine konvergente Teilfolge $\varphi_{t_k}(x)$ mit $t_k \nearrow +\infty$ für $k \longrightarrow \infty$ hat. Damit ist die (1)Eigenschaft von Proposition2 einsetzbar und somit ist der Limes von $\varphi_{t_k}(x)$ in $\omega(x)$. Damit ist $\omega(x)$ nichtleer. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\omega(x)$ zusammenhängend ist, mit einem Widerspruchsbeweis. Angenommen (Annahme1), dass $\omega(x)$ nicht zusammenhängend ist, d. h. es gibt mehrere Teilmengen außer $\omega(x)$ und der leerem Menhe, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, dann kann man $\omega(x)$ wie folgt darstellen:

$$\omega(x) = A \bigcup B$$

für nichtleere Mengen A und B, für die gilt, dass

$\overline{A} \bigcap B = A \bigcap \overline{B} = \emptyset$.

Da $\omega(x)$ abgeschlossen ist, erhält man

$\overline{A} = \overline{A} \bigcap \omega(x) = \overline{A} \bigcap (A \bigcup B) = (\overline{A} \bigcap A) \bigcup (\overline{A} \bigcap B) = A$ und analog für $\overline{B} = B$.

Damit sind die Mengen A, B abgeschlossen, und weil A und B Teilmengen von einer kompakten Menge $\omega(x)$ sind, sind auch kompakt. Wiel A und B kompakt sind, ist auch das kartesische Produkt von A mit B auch kompakt. Da die Metrik eine stetige Funktion auf der Menge des kartesischen Produkt ist, nimmt die Metrik auf dieser Menge das Minimum an. Da $A \cap B = \emptyset$ ist, ist das Minimum positiv.

$\delta := \underbrace{\inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}}_{>0}$.

Man definiert die abgeschlossene Menge

$C = \left\{z \in X : d(z, y) \geq \frac{\delta}{4}, \forall y \in \omega(x)\right\}$.

Behauptung: $C \bigcap \{\varphi_s(x) : s > t\} \neq \emptyset$ für $t > 0$. Das zeigt man auch ein Widerspruchsbeweis.

Angenommen (Annahme2), dass $\{\varphi_s(x) : s > t\}$ mit C disjunkt ist. Dann ist $\{\varphi_s(x) : s > t\}$ vollständig im Komplement von C enthalten.

Das Komplement von C besteht genau aus den Punkten, deren Metrik zu einem Punkt der Limesmenge $\omega(x)$ kleiner ist als $\frac{\delta}{4}$.

Aufgrund der Definition von δ ist dieses Komplement von C die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen A_1 und B_1, wobei A_1 die Menge aller Punkte ist, deren Distanz zu einem Punkt aus A kleiner ist als $\frac{\delta}{4}$, und B_1 die Menge aller Punkte ist, deren Distanz zu einem Punkt aus B kleiner ist als $\frac{\delta}{4}$.

Wegen der Definition von δ und der Dreiecksungleichung gilt,

dass $\delta \leq d(y,A)+d(y,B)$ $\forall y \in \{\varphi_s(x) : s > t\}$ und somit ist für eine geeignete Wahl von δ nur eine der beiden Metriken $d(y,A)$ und $d(y,B)$ kleiner als $\frac{\delta}{4}$.

(Annahme3) Wenn es für ein beliebiges $t > 0$ zwei Zeiten $s_1 > t$ und $s_2 > t$ gibt, so dass

$d(\varphi_{s_1}(x),A) < \frac{\delta}{4}$ und $d(\varphi_{s_2}(x),B) < \frac{\delta}{4}$.

Dann gilt wegen der Definition von δ und der Dreiecksungleichung und der Symmetrie von der Metrik

$\delta \leq d(A,B) \leq d(\varphi_{s_2}(x),A) + \underbrace{d(\varphi_{s_2}(x),B)}_{<\frac{\delta}{4}} \Rightarrow d(\varphi_{s_2}(x),A) > \frac{3\delta}{4}$.

Aus der Stetigkeit von $y \mapsto d(y,A)$ und dem Zwischenwertsatz, dass es ein $s_3 > t$ mit $d(\varphi_{s_3}(x),A) = \frac{\delta}{2}$ und $d(\varphi_{s_3}(x),B) \geq \frac{\delta}{2}$. Somit ist dann $\varphi_{s_3}(x) \in C$, dass ist ein Widerspruch zu der Annahme3, weil unter der Annahmen 1 und 2 $\varphi_{s_3}(x)$ im Komplement von C ist.

Damit folgt, dass es für ein $t > 0$ keine $s_1 > t$ und $s_2 > t$ gibt, für die $d(\varphi_{s_1}(x),A) < \frac{\delta}{4}$ und $d(\varphi_{s_2}(x),B) < \frac{\delta}{4}$ gilt, und darum ist $\{\varphi_s(x) : s > t\}$ entweder in A_1 oder in B_1 enthalten.

Dann gibt es $\forall t > 0$ im $\{\varphi_s(x) : s > t\}$ keinen Punkt y in A_1, also ist A leer, oder keinen Punkt y in B_1, also ist B leer.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme2, weil unter der Annahme1 A und B nicht leer sind.

Also ist $C \bigcap \{\varphi_s(x) : s > t\} \neq \emptyset$ für $t > 0$.

Da C abgeschlossen ist und $C \bigcap \{\varphi_s(x) : s > t\} \neq \emptyset$ ist, folgt, dass es eine Folge $t_k \nearrow +\infty$ existiert, so dass $\varphi_{t_k}(x) \in C$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. Damit ist $C \bigcap \overline{\gamma^+(x)}$ kompakt.

Aus der Kompaktheit von $C \bigcap \overline{\gamma^+(x)}$ und der

(1)Eigenschaft der Proposition2 folgt, dass $C \bigcap \omega(x) \neq \emptyset$.

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme1, da wegen der Definition von $C = \left\{z \in X : d(z,y) \geq \frac{\delta}{4}, y \in \omega(x)\right\}$ gilt, dass $C \bigcap \omega(x) = \emptyset$.

Also ist $\omega(x)$ zusammenhängend.

2.)

Angenommen, dass die (2)Eigenschaft der Proposition3 nicht gilt, dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Folge $t_k \nearrow +\infty$, so dass $\inf\{d(\varphi_{t_k}(x),y) : y \in \omega(x)\} \geq \delta$ für $k \in \mathbb{N}$.

Da die Menge $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\varphi_{s_k}(x)$ von $\varphi_{t_k}(x)$, dessen Limes der Punkt $p \in \omega(x)$ ist, was aus der (1)Eigenschaft der Proposition2 folgt .

Andererseits, folgt aus $\inf\{d(\varphi_{t_k}(x),y) : y \in \omega(x)\} \geq \delta$ für $k \in \mathbb{N}$, dass $d(\varphi_{s_k}(x),y) \geq \delta$ für $k \in \mathbb{N}$ ist und $y \in \omega(x)$, und damit ist $d(p,y) \geq \delta$ für $y \in \omega(x)$. Das ist nicht möglich, also ist $p \in \omega(x)$. Damit folgt die Behauptung.

□

Proposition4:

Sei ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf X gegeben, dann gelten $\forall x \in X$ folgende Eigenschaften:

1.) $y \in \alpha(x)$ genau dann, wenn es eine Folge $t_k \searrow -\infty$ aus $\mathbb{R}^-$, so dass $\varphi_{t_k}(x) \longrightarrow y$ für $k \longrightarrow \infty$.

2.) Wenn Φ ein topologischer Fluss ist, dann ist $\alpha(x)$ rückwärts $\Phi-$*invariant*.

Beweie:

1.) Man hat $\alpha(x) = \bigcap_{s<0} \overline{A_s}$, wobei $A_s = \{\varphi_t(x) : s > t\}$.

Sei jetzt $y \in \alpha(x)$.

Man betrachte zwei Fälle:

Fall1:

Wenn $y \notin \bigcap_{s<0} A_s$ ist, dann existiert ein $p < 0$, so dass $y \notin A_p$. Damit folgt, dass $y \in \overline{A_p} \backslash A_p$ und es eine Folge $t_k \searrow -\infty$ aus $\mathbb{R}^-$ gibt, so dass $\varphi_{t_k}(x) \longrightarrow y$ für $k \longrightarrow \infty$ gilt.

Fall2:

Wenn $y \in \bigcap_{s<0} A_s$ ist, dann existiert ein $p < 0$, so dass $y = \varphi_p(x)$. Für $s < p$ ist $y \in A_s$, dann existiert ein $q < p$, so dass $y = \varphi_q(x)$.

Daraus folft, dass $\varphi_{(q-p)k}(\varphi_p(x)) = y$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt und die fallende Folge $t_k = (q-p)k + p$ erfült $\varphi_{t_k}(x) = y$.

Andererseits, wenn es eine Folge $t_k \searrow -\infty$ aus $\mathbb{R}^-$, so dass $\varphi_{t_k}(x) \longrightarrow y$ für $k \longrightarrow \infty$ gilt, dann ist $y \in \overline{A_s}$ $\forall s \in \mathbb{R}^-$. Also ist $y \in \alpha(x)$.

2.) Wegen der (1) Eigenschaft existiert ein Folge $t_k \searrow -\infty$ aus $\mathbb{R}^-$, so dass $\varphi_{t_k}(x) \longrightarrow y$ für $k \longrightarrow \infty$. Aus der Stetigkeit der Abbildung $(t,x) \mapsto \varphi_t(x)$ aus $\mathbb{R}^- \times X$ folgt, dass $\varphi_{t_k+t}(x) \longrightarrow \varphi_t(y)$ für $k \longrightarrow \infty$, dann ist $\varphi_t(y) \in \alpha(x)$. Damit ist $\alpha(x)$rückwärts $\Phi - invariant$.

$\square$

Proposition5: Sei ein topologischer Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auf X und hat der negative Semiorbit $\gamma^-(x)$ einen kompakten Abschluss, dann gelten:

1.) $\alpha(x)$ ist kompakt, zusammenhängend, nichtleer.

2.) $\inf\{d(\varphi_t(x), y) : y \in \alpha(x)\} \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow -\infty$.

Der Beweis von Proposition5 geht analog zum Beweis von Proposition3.