# Kapitel 4

# Einführung in die Differentialtopologie

Dieser Abschnitt enthält eine kleine Einfürung in die sogenannte Differentialtopologie. Das ist die Theorie der qualitativen Aspekte von differenzierbaren Abbildungen (vgl. J.W.Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint", Princeton Univ. Press).

## 4.1 Der Satz von Sard

**Satz von Sard 4.1.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Bild $f[C]$ der Menge $C = \{x \in U \mid \operatorname{Rang} T_x(f) < n\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

**Beweis:** Für $n = 0$ ist $C = \emptyset$ und die Aussage gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir die Aussage mit vollständiger Induktion in $m \in \mathbb{N}_0$. Für $m = 0$ enthält $C$ einen Punkt und die Aussage gilt. Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für $m - 1 \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Für $m \geq n$ betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge $C_k$ aller Punkte, so dass alle partiellen Ableitungen höchstens $k$–ter Ordnung verschwinden. Diese Mengen sind ineinander enthalten: $C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots$. Wir zeigen, dass erstens $f[C \setminus C_1]$, zweitens $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und drittens $f[C_k]$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ Nullmengen sind. Dann ist auch $f[C] = f[C \setminus C_1] \cup f[C_1 \setminus C_2] \cup \ldots \cup f[C_{k-1} \setminus C_k] \cup f[C_k]$ eine Nullmenge. Für $m < n$ ist $C = U$ und aus dem dritten Schritt folgt für $k = 0$ die Aussage.

**1.** Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und $C \setminus C_1 = \emptyset$. Für $n > 1$ zeigen wir zuerst, dass jedes $y \in C \setminus C_1$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ enthält, so dass $f[V \cap (C \setminus C_1)]$ eine Nullmenge ist. Wegen $y \notin C_1$ ist mindestens eine erste partielle Ableitung von $f$ bei $y$ ungleich Null. Nach vertauschen der Komponenten können wir $\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} \neq 0$ annehmen. Dann hat $h : U \to \mathbb{R}^m$, mit $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$ bei $y$ eine invertierbare Ableitung und bildet wegen dem Satz der inversen Funktion eine offene Umgebung $V \subset U$ von $y$ mit einem Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Sei $g = f \circ h^{-1}$. Die Punkte $x \in V'$ mit $\mathrm{Rang}(T_x(g)) < n$ sind dann genau $C' = h[V \cap C]$, und $f[V \cap C] = g[C']$. Aufgrund der Definition von $h$ und $g$ bildet $g$ die Hyperebene $H_t = \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, für das diese Hyperbene nicht leer ist, nach $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei $g_t : H_t \to \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ die Einschränkung von $g$ auf $H_t$. Auf $V'$ dividiert $T(h^{-1})$ den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ und $T(g)$ bildet ihn auf einen Vektor ab, dessen erster Eintrag nicht Null ist. Dann hat $T(g_t)$ bei $x \in H_t$ genau dann einen Rang $< n - 1$, wenn dort $T(g)$ einen Rang $< n$ hat, also wenn $h^{-1}(x)$ in $C$ liegt. Nach Induktionsvorausetzung ist das Bild $g_t[H_t \cap C']$ für alle diese Hyperebenen eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Weil $C'$ als abgeschlossene Teilmenge von $V'$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist, ist auch $g[C']$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und damit messbar. Dann folgt aus dem Satz von Fubini, dass $g[C'] = f[V \cap C]$ eine Nullmenge ist. Weil jede solche Umgebung $V$ von $y$ einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C \setminus C_1$, deren Bilder unter $f$ Nullmengen sind. Dann ist $f[C \setminus C_1]$ eine Nullmenge.

**2.** Für $y \in C_k \setminus C_{k+1}$ ist mindestens eine $(k+1)$–te partielle Ableitung ungleich 0. Nach Vertauschen der Komponenten können wir annehmen, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ der Ordnung $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ und ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $w(x) = \partial^\alpha f_r(x)$ bei $y$ verschwindet, aber $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ nicht. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet $x \mapsto h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_m)$ mit einem Diffeomorphismus eine offenen Umgebung $V \subset U$ von $y$ auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Weil auf $C_k$ alle $k$–ten partiellen Ableitungen verschwinden, bildet sie $C_k \cap V$ auf die Hyperebene $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ ab. Die Einschränkung $g|_H$ der Abbildung $g = f \circ h^{-1}$ auf $H$ bildet laut Induktionsvorausetzung alle Punkte $x \in H \cap V'$, an denen der Rang von $T(g|_H)$ kleiner als $n$ ist, auf eine Nullmenge ab. Alle Punkte von $h[C_k \cap V]$ sind in dieser Menge enthalten. Deshalb ist $g|_H[h[C_k \cap V]] = f[C_k \cap V]$ eine Nullmenge. Weil jede solche Umgebung $V$ von $y$ einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C_k \setminus C_{k+1}$ deren Bilder unter $f$ Nullmengen sind. Dann ist $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ eine Nullmenge.

**3.** Wir zeigen dass $f[C_k]$ in $\mathbb{R}^n$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ eine Nullmenge ist. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von $\mathbb{R}^m$ und $Q = \overline{B(x, r)} \subset U$ ein abgeschlossener Ball bezüglich dieser Norm, also ein Quader mit den Kantenlängen $2r$. Weil $f$ $(k+1)$–mal stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Restgliedabschätzung im Satz von Taylor und der Kompaktheit von $Q$ ein $c > 0$ mit

$$\|f(x+h) - f(x)\|_\infty \leq c\|h\|_\infty^{k+1} \qquad \text{für alle } x \in C_k \cap Q \text{ und } x + h \in Q.$$

Wir unterteilen $Q$ in $l^m$ Quader mit Kantenlängen $\frac{2r}{l}$. Sei $\tilde{Q}$ ein solcher Quader, der ein $x \in C_k$ enthält. Dann gilt $\|h\|_\infty \leq \frac{2r}{l}$ für jeden Punkt $x + h \in \tilde{Q}$. Mit der obigen

Abschätzung folgt, dass $f[\tilde{Q}]$ in einem abgeschlossenen Ball bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit dem Radius $c(\frac{2r}{l})^{k+1}$ enthalten ist, also höchstens das Volumen $(2c)^n(\frac{2r}{l})^{(k+1)n}$ hat. Dann hat $f[C_k \cap Q]$ höchstens das $l^m$ fache Volumen $2^{n(k+2)}c^n r^{n(k+1)} l^{m-(k+1)n}$. Wegen $k+1 > \frac{m}{n}$ konvergiert diese obere Schranke im Grenzwert $l \to \infty$ gegen Null.

Im Fall $m < n$ und $C = U$ ist $f[U]$ wegen **3.** eine Nullmenge. **q.e.d.**

Die Aussage dieses Satzes gilt auch für $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$ mit $l > \max\{0, m-n\}$. Um das zu zeigen muss im zweiten Schritt $g = f \circ h^{-1}$ auf $H$ die Induktionsvorraussetzungen erfüllen. Dafür benötigt man ein weiteres Argument und die stärkere Bedingung $l > \max\{0, m-n\}$ anstatt der Bedingung $l \geq \frac{m}{n}$ aus dem dritten Schritt.

**Korollar 4.2** (A.B. Brown). *Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$ eine überall dichte (mit keiner offenen nichtleeren Menge schnittfremde) Teilmenge von $Y$.*

**Beweis:** Weil jede offene Teilmenge einen offenen Ball enthält, hat sie auch positives Volumen. Wegen dem Satz von Sard enthält dann jede offene Teilmenge von $Y$ Punkte aus diesem Komplement. Damit ist das Komplement überall dicht. **q.e.d.**

**Lemma 4.3.** *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $\dim X \geq \dim Y$. Für reguläre Werte $y$ von $f$, d.h.*

$$y \in f[X] \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\},$$

*ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine $\dim X - \dim Y$–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $X$. Für $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ist $T_x f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$.*

**Beweis:** Auf $f^{-1}[\{y\}]$ gilt $\operatorname{Rang} T(f) = \dim Y$. Wegen Satz 1.44 ist $\operatorname{Rang} T(f)$ auf einer Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ konstant. Dann ist $T_x(f)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ surjektiv und die Aussagen folgen aus Korollar 1.46. **q.e.d.**

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern.

**Korollar 4.4.** *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X$ mit Rand auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit $Y$ ohne Rand mit $\dim X > \dim Y$. Für reguläre Werte $y$ von $f$, die auch reguläre Werte von $f|_{\partial X}$ sind, ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}] \cap \partial X$.*

**Beweis:** Die Aussage folgt aus der Anwendung von Lemma 4.3 auf $f$ und $f|_{\partial X}$.**q.e.d.**

**Satz 4.5.** *Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit $X$ mit oder ohne Rand ist diffeomorph zu einem Intervall (d.h. $(0,1)$, $[0,1)$ oder $[0,1]$) oder $\mathbb{S}^1$.*

**Beweis:** Sei $X$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wählen einen Atlas von Karten mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Jede Funktion $f_m$ verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches $U_m$ der Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{H}^1 = [0,\infty)$. Wir definieren eine Abbildung $g : TX \to [0,\infty)$ durch

$$g(v) = \sum_{\{m|x\in U_m\}} |f_m(x)d\phi_m(v)| \quad \text{für alle} \quad v \in T_xX.$$

Insbesondere ist $g^{-1}[\{0\}]$ der Nullschnitt von $TX$ und $g$ außerhalb des Nullschnittes glatt. Für alle $x \in X$ gibt es genau zwei $v \in T_xX$ mit $g(v) = 1$, die auseinander durch Multiplikation mit $-1$ hervorgehen. Jedes solche $v$ setzt sich auf einer Umgebung von $x$ eindeutig zu einem glatten Vektorfeld nach $g^{-1}[\{1\}]$ fort. Die Integralkurven dieser lokalen Vektorfeldern sind Immersionen $\phi : I \to X$ auf Intervallen mit

$$g(T_t(\phi)(1)) = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in I \quad \text{und} \quad 1 \in T_tI \simeq \mathbb{R}.$$

Damit das Bild von $\phi$ auch Randpunkte von $X$ enthalten kann, lassen wir Intervalle $I$ mit Rand zu. Dann gibt es wegen Satz 2.5 für jedes $x \in X$ eine solche Integralkurve $\phi : I \to X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi^{-1}[\partial X] \subset \partial I$. Weil die Vektorfelder nach $g^{-1}[\{1\}]$ bis auf ein Vorzeichen eindeutig sind, erüllen zwei Integralkurven $\phi_2 : I_2 \to X$ von solchen Vektorfeldern mit $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ immer eine der beiden folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t+t_1) &= \phi_2(t+t_2) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap I_2 - t_2 \\ \phi_1(t+t_1) &= \phi_2(t_2-t) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap t_2 - I_2. \end{aligned}$$

Dann überträgt sich auch der Satz 2.7 und es gibt für jedes $x$ ein maximales $\phi : I \to X$ mit $\phi(0) = x$, so dass alle anderen solchen $\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$ Einschränkungen von $\phi$ auf ein Teilintervall von $I$, oder Einschränkungen von $t \mapsto \phi(-t)$ auf ein Teilintervall von $-I$ sind. Wenn $\phi$ einen Randpunkt von $I$ nach $X \setminus \partial X$ abbildet, dann läßt sich $\phi$ über den Randpunkt von $I$ hinaus fortsetzten. Deshalb bilden maximale $\phi$ Randpunkte von $I$ auf Randpunkte von $X$ ab. Insbesondere ist das Bild eines maximalen $\phi$ in $X$ offen. Wenn $\phi(t_k)$ für eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich $I$ eines maximalen $\phi$ gegen $x \in X$ konvergiert, dann existiert ein solches $\tilde{\phi} : \tilde{I} \to X$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$. Das Bild $\tilde{\phi}[\tilde{I}]$ ist eine Umgebung von $x$ und enthält unendlich viele $\phi(t_k)$. Damit läßt sich $\phi$ so fortsetzten, dass $\phi[I]$ $x$ enthält. Also ist $\phi[I]$ auch abgeschlossen. Wenn $X$ zusammenhängend ist, ist $\phi$ surjektiv. Wenn $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ gilt, dann folgt entweder $\phi(t+t_1) = \phi(t_2-t)$ oder $\phi(t+t_1) = \phi(t+t_2)$. Im ersten Fall folgt mit $t = \frac{t_2-t_1}{2} + \epsilon$

$$\phi\big(\tfrac{t_1+t_2}{2} + \epsilon\big) = \phi\big(\tfrac{t_1+t_2}{2} - \epsilon\big) \quad \text{für } |\epsilon| \leq \tfrac{t_2-t_1}{2}.$$

Da $\phi$ eine Immersion ist wiederspricht das der lokalen Injektivität von $\phi$ bei $\frac{t_1+t_2}{2}$. Im zweiten Fall ist $\phi$ periodisch $\phi(t+\gamma) = \phi(t)$ mit Periode $\gamma = t_2 - t_1$. Weil $\phi$ als

Immersion lokal injektiv ist, gibt es eine kleinste positive Periode $\gamma_{\min}$ von $\phi$. Also ist $\phi$ entweder ein Diffeomorphismus oder induziert einen von $\mathbb{R}/\gamma_{\min}\mathbb{Z}$ nach $X$. **q.e.d.**

**Lemma 4.6** (Hirsch)**.** *Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit $X$ mit Rand gibt es keine glatte Abbildung $f : X \to \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$.*

**Beweis:** Sei $f$ eine solche Abbildung mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$. Wegen dem Satz von Sard gibt es ein $y \in \partial X$, so das $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = \{y\}$ ist. Das widerspricht Satz 4.5, wegen dem die kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand als disjunkten Vereinigungen von $\mathbb{S}^1$ und $[0, 1]$ und eine gerade Anzahl an Randpunkten haben.**q.e.d.**

Im Beweis vom Fixpunktsatz von Brouwer 3.34 kann dieses Lemma das Lemma 3.33 ersetzen. Die Existenz der Einschränkung $h|_{\overline{B(0,1)}}$ der dort konstruierten glatten Abbildung $h : B(0, r) \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ widerspricht Lemma 4.6.

## 4.2 Der Grad glatter Abbildungen

**Definition 4.7.** *Zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen glatt homotop, wenn es eine glatte Abbildung $F : X \times [0, 1] \to Y$ gibt, mit $F(x, 0) = f(x)$ und $F(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Zwei solche Diffeomorphismen heißen glatt isotop, wenn $x \mapsto F(x, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist.*

Zuerst zeigen wir, dass die zurückgezogenen Vektorraumbündel sich unter einer Homotopie nicht ändern. Deshalb sind dann auf $\mathbb{R}^n$ alle Vektorraumbündel trivial.

**Satz 4.8.** *Sei $(E, B, \pi)$ ein Vektorraumbündel. Für glatt homotope glatte Abbildungen $f, g : X \to B$ auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X$ sind $f^*E$ und $g^*E$ isomorph.*

**Beweis:** Sei $F : X \times [0, 1] \to B$ eine glatte Homotopie von $f = F(\cdot, 0)$ nach $g = F(\cdot, 1)$. Dann ist $F^*E$ ein Vektorraumbündel über $X \times [0, 1]$ mit Projektion $\pi$. Es genügt offenbar zu zeigen, dass die beiden Vektorraumbündel $f^*E = \pi^{-1}[X \times \{0\}]$ und $g^*E = \pi^{-1}[X \times \{1\}]$ auf $X$ isomorph sind. Weil $\{x\} \times [0, 1]$ für jedes $x \in X$ eine kompakte Teilmenge von $X \times [0, 1]$ ist, wird diese Menge von endlich viele kartesischen Produkten $U_j \times I_j$ von offenen Umgebungen von $x$ mit offenen Teilintervallen $I_j$ von $[0, 1]$ überdeckt, auf denen $F^*E$ durch glatte Abbildungen trivialisiert wird:

$$\begin{array}{ccccc} F_j \times U_j \times I_j & \xrightarrow{\phi_j} & \pi^{-1}[U_j \times I_j] & \hookrightarrow & F^*E \\ p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U_j \times I_j & \xrightarrow{\mathbb{1}_{U_j \times I_j}} & U_j \times I_j & \hookrightarrow & X \times [0,1] \end{array}$$

Hierbei wird $[0,1]$ von den offenen Teilintervale $I_j$ überdeckt. Also gibt es endlich viele $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_J = 1$, so dass $[t_{j-1}, t_j]$ jeweils in $I_j$ enthalten ist. Wir können die Intervalle so verkleiner, so dass $t_{j-2}$ und $t_{j+1}$ jeweils nicht in $I_j$ enthalten sind. Für jedes $j = 1, \ldots, J$, $x \in U_x = U_1 \cap \ldots \cap U_J$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ist ein Isomorphismus von der Faser $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ von $F^*E$ über $(x, t_{j-1})$ auf die Faser $\pi^{-1}[\{(x,t)\}]$ über $(x,t)$, der für $t = t_{j-1}$ gleich $\mathbb{1}_{\pi^{-1}[\{(x,t_{j-1})\}]}$ ist. Wir definieren eine Abbildung $\phi_x$ auf $F_x \times U_x \times [0, t_1]$ durch $\phi_1$ und induktiv in $j = 2, \ldots, J$ auf $U_x \times [t_{j-1}, t_j]$ durch

$$\phi_x(f, x, t) = \phi_j(\cdot, x, t) \circ \phi_j^{-1}(\cdot, x, t_{j-1})\big(\phi_x(f, x, t_{j-1})\big)$$

Weil diese Abbildungen auf $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ jeweils mit dem schon definierten $\phi_x$ übereistimmen, setzen sie sich mit $F_x = F_1$ zu einer glatten Trivialisierung

$$\begin{array}{ccccc}
F_x \times U_x \times [0,1] & \xrightarrow{\phi_x} & \pi^{-1}[U_x \times [0,1]] & \hookrightarrow & F^*E \\
p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
U_x \times [0,1] & \xrightarrow{\mathbb{1}_{U_x \times [0,1]}} & U_x \times [0,1] & \hookrightarrow & X \times [0,1]
\end{array}$$

von $F^*E$ auf $U_x \times [0,1]$ zusammen. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_0 = 0$ eine glatte Zerlegung der Eins zu der Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von $X$, $U_n$ jeweils das Element der Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$, von dem $\overline{\{x \in X \mid h_n(x) \neq 0\}}$ eine kompakte Teilmenge ist, und $\phi_n$ die entsprechende Trivialisierung von $F^*E$ auf $U_n \times [0,1]$. Dann definiert $H_n = (\mathbb{1}_X \times (h_0 + \ldots + h_n)) : X \to X \times [0,1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Diffeomorphismus von $X$ auf ein Untermannigfaltigkeit von $X \times [0,1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ unterscheiden sich jeweils $H_{n-1}$ und $H_n$ nur auf einer kompakten Teilmenge von $U_n$. Insbesondere unterscheiden sich die beiden Vektorraumbündel $(F \circ H_{n-1})^*E$ und $(F \circ H_n)^*E$ nur auf $U_n$. Für $x \in U_n$ definieren

$$\begin{aligned}
&\phi_n(\cdot, H_n(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_{n-1}(x)) : \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}] \to \pi^{-1}[\{H_n(x)\}], \\
&\phi_n(\cdot, H_{n-1}(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_n(x)) : \pi^{-1}[\{H_n(x)\}] \to \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}]
\end{aligned}$$

zu einander inversen Isomorphismen zwischen Fasern von $F^*E$, die für $x \in U_n$ mit $h_n(x) = 0$ gleich der Identität sind. Also sind $(F \circ H_{n-1})^*E$ und $(F \circ H_n)^*E$ für alle $n \in \mathbb{N}$ isomorph. Wegen der Eigenschaften der Zerlegung der Eins, induzieren diese Isomorphismen zwischen den Vektorraumbündeln $((F \circ H_n)^*E)_{n\in\mathbb{N}}$ im Grenzwert $n \to \infty$ einen Isomorphismus $f^*E = (F \circ H_0)^*E \simeq (F \circ \lim_{n\to\infty} H_n)^*E = g^*E$. **q.e.d.**

Aus diesem Satz und Beispiel 1.62 folgt sofort folgendes Korollar:

**Korollar 4.9.** *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $X$ heißt glatt zusammenziehbar, wenn $\mathbb{1}_X$ glatt homotop zu der konstanten Abbildung $X \to X$ auf ein $x_0 \in X$ ist. Auf solchen Mannigfaltigkeiten sind alle Vektorraumbündel trivial.* **q.e.d.**

**Beispiel 4.10.** **(i)** *Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ ist $V \times [0,1] \to V, (v,t) \mapsto (1-t)v$ eine glatte Homotopie von $\mathbb{1}_V$ auf die konstante Abbildung auf die Null. Also ist $V$ zusammenziehbar und alle Vekorraumbündel auf $V$ sind trivial.*
**(ii)** *Wegen dem Satz vom Igel 3.6 ist $T\mathbb{S}^{2n}$ nicht trivial und $\mathbb{S}^{2n}$ nicht zusammenziehbar. Beispiel 4.13 wird zeigen, dass kompakte Mannigfaltigkeit nicht zusammenziehbar sind.*

Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Satz 1.37 eine diskrete Teilmenge von $X$, von der je zwei verschiedene Elemente disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn $X$ kompakt ist, hat diese Menge also nur eine endliche Anzahl $\#f^{-1}[\{y\}]$ an Elementen. Wir zeigen jetzt

**Satz 4.11.** *Seien $f, g : X \to Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $X$ kompakt und $\dim X = \dim Y$. Wenn $y \in Y$ nicht zu folgender Menge gehört, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ eine gerade Zahl:*

$$\{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\} \cup \{g(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(g)) < \dim Y\}.$$

*Wenn $Y$ zusammenhängend ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}]$ bis auf eine gerade Zahl unabhängig von der Wahl von $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$.*

**Beweis:** Sei $F : X \times [0,1] \to Y$ eine glatte Homotopie zwischen $f$ und $g$. Wenn $y$ zusätzlich nicht zu $\{F(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,1] \text{ und } \operatorname{Rang}(T_x(F)) < \dim Y\}$ gehört, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $(f^{-1}[\{y\}] \times \{0\}) \cup (g^{-1}[\{y\}] \times \{1\})$. Wegen Satz 4.5 enthält dieser Rand eine gerade Anzahl an Punkten und $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ ist gerade.

Aufgrund der Vorausetzung an $y$ und dem Satz der inversen Funktion sind die beiden Funktionen $z \mapsto \#f^{-1}[\{z\}]$ und $z \mapsto \#g^{-1}[\{z\}]$ auf einer kleinen Umgebung von $y$ konstant. Wegen dem Satz von Sard enthält diese Umgebung einen Punkt $z$ in obiger Menge. Also gilt die erste Aussage. Für die zweite beutzen wir

**Lemma 4.12.** *Seien $y, z \in Y$ Punkte einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann bildet ein zu $\mathbb{1}_y$ isotoper Diffeomorphismus von $Y$ $y$ auf $z$ ab.*

**Beweis:** Für je zwei Punkte in $(0,1)$ gibt es eine streng monotone wachsende stückweise lineare Funktion, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ gleich $\mathbb{1}_{(0,1)}$ ist, und den eine Punkt auf den anderen abbildet. Dann gibt es auch einen Diffeomorphismus $\phi$ von $\mathbb{R}$ auf sich selber, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ die identische Abbildung ist und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Die Abbildung $(x,t) \mapsto tx + (1-t)\phi(x)$ definiert dann eine glatte Isotopie von $\phi$ zu der Identität. Wenn wir für einen Punkt von $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ auf der Verbindungsgeraden mit 0 einen geeigneten Punkt $a$ wählen, ist die Abbildung von der Form

$x \mapsto a + r\phi(\frac{|x-a|}{r})\frac{x-a}{|x-a|}$ ein Diffeomeorphismus von $B(0,R)$, der außerhalb einer kompakten Menge in $B(a,r) \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ gleich $\mathbb{1}_{B(0,R)}$ ist, und 0 auf den Punkt von $B(0,R)$ abbildet. Außerdem ist $\Phi$ zu $\mathbb{1}_{B(0,R)}$ isotop. Mit einem solchen Diffeomorphismus gilt die Aussage für Punkte $y$ und $z$ im Definitionsbereich einer Karte. Weil die Aussage in $y$ und $z$ transitiv ist, ist die Menge der Punkte $z$, so dass die Aussage für $y$ und $z$ gilt, dann offen und abgeschlossen, und damit gleich $Y$. **q.e.d.**

**Fortsetzung des Beweises von Satz 4.11:** Wegen dem Lemma gibt es für zwei Punkte $y, z \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ einen zu $\mathbb{1}_Y$ glatt isotopen Diffeomorphismus $\Phi$ von $Y$, der $z$ auf $y$ abbildet. Dann sind $f$ und $g = \Phi \circ f$ glatt homotop mit $g^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$. Also folgt die zweite Aussage aus der ersten. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass $\deg_2(f) = \#f^{-1}[\{y\}] \mod 2$ unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist und eine Homotopieinvariante von solchen glatten Abbildungen $f : X \to Y$ definiert. Wenn $f$ nicht surjektiv ist, dann ist die Anzahl für Werte $y$ außerhalb des Bildes von $f$ Null und damit $\deg_2(f) = 0 \mod 2$. Weil das Bild $f[X]$ immer kompakt ist, ist $f$ nicht surjektiv wenn $Y$ nicht kompakt ist, und $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

**Beispiel 4.13.** **(i)** *Jede konstante Abbildung* $f : X \to X$ *hat* $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

**(ii)** *Die Identität einer kompakten Mannigfaltigkeit* $\mathbb{1}_X$ *hat* $\deg_2(\mathbb{1}_X) = 1 \mod 2$.

**(iii)** *Für* $X = Y = \mathbb{S}^n$ *folgt Lemma 4.6 für* $X = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *und damit der Brouwerschen Fixpunktsatz 3.34, weil jede glatte Abbildung* $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{S}^n$ *mit* $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *eine glatte Homotopie von* $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *zu einer konstanten Abbildung definiert.*

**Definition 4.14.** *Für eine glatte Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* $X$ *kompakt und* $\dim X = \dim Y$ *hängt das Vorzeichen von* $\det(T_x(f))$ *bei* $x \in X$ *nur von den Orientierungen von* $X$ *und* $Y$ *ab. Wir definieren*

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \frac{\det(T_x(f))}{|\det(T_x(f))|} \quad \textit{für } y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

**Satz 4.15.** *Seien* $f, g : X \to Y$ *glatt homotope glatte Abbildungen zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* $X$ *kompakt und* $\dim X = \dim Y$. *Wenn* $y \in Y$ *nicht zu folgender Menge gehört, dann ist* $\deg(f, y) = \deg(g, y)$*:*

$$\{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\} \cup \{g(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(g)) < \dim Y\}.$$

*Wenn* $Y$ *zusammenhängend ist, dann ist* $\deg(f, y)$ *unabhängig von der Wahl von*

$$y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \textit{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ $\deg(f, y) = 0$ gilt, wenn $X$ der Rand einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit $Z$ ist und $f$ sich zu einer glatten Abbildung $F : Z \to Y$ fortsetzt. Wenn $y \in Y$ zusätzlich nicht in $\{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ liegt, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine endliche Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $Z$, deren Rand in $X = \partial Z$ liegt. Sei $A \subset F^{-1}[\{y\}]$ eine Zusammenhangskomponente mit nicht verschwindendem Rand $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Die Orientierungen von $Z$ und $Y$ induzieren eine Orientierung von $A$, deren äußeres Produkt mit der durch $f$ zurückgezogenen nicht verschwindenden Volumenform von $Y$ positiv proportional zu der nichtverschwindenden Volumenform von $Z$ ist. Wegen Satz 4.5 ist $A$ als eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ein abgeschlossenes Intervall, und die Orientierung von $A$ zeigt an einem Ende aus $A$ heraus und an dem anderen Ende nach $A$ hinein. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von $\det(T_a(f))$ und $\det(T_b(f))$ unterschiedlich sind, und deshalb $\deg(f, y)$ verschwindet. Für $y \in \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist die Funktionen $y' \mapsto \deg(f, y')$ wegen Satz 1.37 auf einer Umgebung von $y$ konstant. Wegen dem Satz von Sard gibt es in dieser Umgebung ein $y' \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$. Daraus folgt $\deg(f, y) = 0$, wenn sich $f$ zu einem $F : Z \to Y$ fortsetzt.

Wenn $f$ und $g$ glatt homotop sind, dann sind $f$ und $g$ die Randwerte von $F : X \times [0, 1] \to Y$ mit $\partial(X \times [0, 1]) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Weil beide Randwerte bezüglich der Orientierung von $X \times [0, 1]$ umgekehrtes Vorzeichen haben folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten wie im Beweis von Satz 4.11. **q.e.d.**

Aus Satz 4.15 folgt ein zweiter Beweis des Satzes vom Igel 3.6:

**Beweis:** Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch Abbildungen

$$F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0$$

beschrieben. Für ungerades $n$ beschreibt $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ ein solches glattes nicht verschwindendes Vektorfeld. Für gerades $n$ hat die Antipodenabbildung von $\mathbb{S}^n$ als eine Verkettung von den $n+1$ Abbildungen, die jeweils eine Koordinate von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $-1$ multiplizieren den Grad $(-1)^{n+1}$ und ist wegen Satz 4.15 nicht glatt homotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$. Die Abbildung $F$ zu einem glatten nichtverschwindenden Vektorfeld definiert aber folgende glatte Homotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu der Antipodenabbildung:

$$\mathbb{S}^n \times [0, 1] \to \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Für gerades $n$ kann es also kein solches Vektorfeld $F$ geben. **q.e.d.**

## 4.3 Vektorfelder

In diesem Abschnitt untersuchen wir qualitative Aspekte von Vektorfeldern auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Lokal sieht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit wie der $\mathbb{R}^n$ aus. Deshalb betrachten wir zunächst Vektorfelder $F$ auf dem $\mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle. Sei also $F : B(x_0, R) \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit $F(x_0) = 0$ und $F(x) \neq 0$ für $x \in B(x_0, R) \setminus \{0\}$. Dann definiert für alle $0 < r < R$ die Abbildung

$$\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{F(x_0 + rx)}{\|F(x_0 + rx)\|}$$

eine glatte Abbildung. Diese Abbildungen sind für alle $0 < r < R$ zueinander glatt homotop und haben deshalb den gleichen Grad. Den Grad dieser Abbildung bezeichen wir als den $\mathrm{Index}(F, x_0)$ des Vektorfeldes $F$ an der isolierten Nullstele $x_0$.

**Lemma 4.16.** *Für ein glattes Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle bei $x_0 \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ hat $T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}$ eine isolierte Nullstelle bei $\Phi(x_0)$ mit*

$$\mathrm{Index}(T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}, \Phi(x_0)) = \mathrm{Index}(F, x_0).$$

**Beweis:** Wir zeigen zuerst, dass jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus $\Phi$ von $\mathbb{R}^n$ glatt isotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. Nach Verkettung mit einer Translation haben wir $\Phi(0) = 0$.

$$F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx) & \text{für } t \in (0, 1] \\ T_0(\Phi) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

definiert dann eine Isotopie von dem linearen Isomorphismus $T_0(\Phi)$ nach $\Phi$. Wegen $\Phi(0) = 0$ läßt sich $\Phi(x)$ schreiben als $\Phi(x) = x_1\phi_1(x) + \ldots + x_n\phi_n(x)$ mit glatten Funktionen $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Dann ist $F(x, t) = x_1\phi_1(tx) + \ldots + x_n\phi_n(tx)$ und deshalb auch bei $t = 0$ eine glatte Isotopie. Dann folgt die Aussage daraus, dass die Gruppe der linearen orientierungerhaltender Isomorphismen zusammenhängend ist.

Wenn $\Phi$ orientierungserhaltend ist, konstruieren wir mithilfe der Isotopie aus dem ersten Teil eine eine glatte Homotopie zwischen der Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und dem Diffeomorphismus $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$. Das definiert eine glatte Homotopie zwischen den entsprechenden glatten Abbildungen von $\mathbb{S}^{n-1} \sim \partial B(x_0, R)$ nach $\mathbb{S}^{n-1}$. Dann folgt die Aussage aus Satz 4.15. Wenn $\Phi$ nicht orientierungserhalten ist, genügt es zu zeigen, dass der Index nicht von der Orientierung abhängt. Für den speziellen Fall $x_0 = 0$ und einer Reflektion einer Koordinate ändert sich der Grad nicht, weil die Ableitung der entsprechenden Abbildung von $\mathbb{S}^{n-1}$ auf sich selber mit der Reflektion konjugiert wird, und deshalb die Determinante das Vorzeichen nicht ändert. **q.e.d.**

Wegen diesem Lemma ist der Index eines glatten Vektorfeldes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit bei einer isolierten Nullstelle unabgängig von der Karte definiert.

**Lemma 4.17.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, also eine $n$–dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $F : X \to \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit isolierten Singularitäten, das auf $\partial X$ nach Außen zeigt, also in den Karten in die obere Halbebene eine negative letzte Komponente hat. Dann ist*

$$\sum_{x \in F^{-1}[\{0\}]} \mathrm{Index}(F, x)$$

*gleich dem Grad der äußeren Normalen $N$, als glatte Abbildung von $\partial X$ nach $\mathbb{S}^{n-1}$.*

**Beweis:** Mithilfe des in Satz 3.30 (ii) konstruierten Kragens, können wir eine glatte Homotopie von einem glatten Vektorfeld, das auf $\partial X$ nach Außen zeigt auf das dort definierte Vektorfeld $-N$ definieren. Wegen Satz 4.15 können wir dann annehmen, dass das Vektorfeld auf $\partial X$ mit dieser äußeren Normalen übereinstimmt. Wir schneiden um jede isolierte Nullstelle eine kleinen Ball aus $X$ heraus. Auf der entstehenden glatten Mannigfaltigkeit mit Rand definiert das normierte Vektorfeld eine glatte Abbildung nach $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Grad auf dem Rand wegen des ersten Teils des Beweises von Satz 4.15 verschwindet. Dieser Grad ist die Summe des Grades der äußeren Normalen auf $\partial X$ minus der Summe über die Indizes von dem Vektorfeld. **q.e.d.**

Allgemein kann man folgendes zeigen:

**Satz von Poincare und Hopf 4.18.** *Sei $F$ ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit $X$, das nur isolierte Nullstellen hat, und wenn $X$ einen Rand hat auf $\partial X$ nach Außen zeigt. Dann ist die Summe der Indizes von $F$ unabhängig von der Wahl eines solchen Vektorfeldes und gleich der sogenannten Eulerchrakteristik von $X$:*

$$\sum_{x \in \textit{Nullstellen von } F} \mathrm{Index}(F, x) = \chi(X).$$