Analysis III

FS 2021

Martin U. Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Dieser Begriff erlaubt es die Differential– und Integralrechnung auf viele Fragestellungen anzuwenden. Er beschreibt geometrische Gebilde, die lokal wie offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ aussehen, aber global auf sehr vielfältige Weise verklebt sein können. Entsprechend werden wir einerseits die lokale Differential– und Integrationsrechnung anwenden und weiterentwickeln und andererseits auf neue globale Fragestellungen stoßen.

1.1 Zusammenhängende Komponenten

Zunächst wiederholen wir die Begriffsbildung von metrischen Räumen.

Definition 1.1. *(Metrik auf einer Menge X) Eine Metrik (oder Abstandsfunktion) ist eine Abbildung* $d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ *mit drei Eigenschaften*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *für alle* $x, y \in X$ *und* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *(Positivität).*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie).*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

Beispiel 1.2. **(i)** *auf jeder Menge X definiert* $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

die sogenannte diskrete Metrik.

(ii) *Auf* $\mathbb{R}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iii) *Auf* $\mathbb{C}$ *definiert* $d(x, y) = |x - y|$ *eine Metrik.*

(iv) *Auf jeder nicht leeren Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) definiert die Einschränkung von d auf $A \times A \to \mathbb{R}$ eine Metrik.*

(v) *Auf dem kartesischen Produkt zweier metrischer Räume definiert die Summe beider Metriken eine Metrik. Sie heißt Metrik des kartesischen Produktes.*

(vi) *Die Einschränkung der Metrik (ii) auf die Vereinigung der inversen der natürlichen Zahlen mit $\{0\}$ definiert eine Metrik auf $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} \simeq \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$:*

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm} \quad d(\infty, n) = d(n, \infty) = \frac{1}{n} \quad d(\infty,\infty) = 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.3. *(offener Ball, Umgebung, offene Menge) Ein offener Ball in (X, d) mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$ ist die Menge $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $O \subset X$, die für ein $r > 0$ einen Ball $B(x, r)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 1.4. *In $\mathbb{R}$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus $(x - r, x + r)$. Im $\mathbb{R}^n$ besteht der Ball $B(x, r)$ aus allen Punkten, deren euklidischer Abstand zu x kleiner ist als r.*

Alle offenen Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x. Für $y \in B(x, r)$ ist $d(x, y) < r$. Sei $z \in B(y, r - d(x, y))$. Dann gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$, also auch $B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle tatsächlich offen.

Offenbar ist die beliebige Vereinigung von offenen Mengen wieder offen. Für zwei offene Mengen O und O' und $x \in O \cap O'$ gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ mit $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) \subset B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$, und $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen wieder offen.

Definition 1.5. *(abgeschlossene Mengen, Abschluss) Die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossen. Der Abschluss $\bar{A}$ eine Menge A ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.*

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen. Deshalb ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit ihrem Abschluss übereinstimmt.

Definition 1.6. *Ein topologischer Raum X ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie auf X, d.h. einer Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen von X, deren Elemente wir offene Mengen von X nennen. Sie erfüllt drei Bedingungen:*

(i) *Die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen ist offen.*

(ii) *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.*

(iii) X *und* $\emptyset$ *sind offen.*

Ein topologischer Raum heißt Hausdorffraum, wenn je zwei unterschiedliche Punkte in zwei disjunkten offenen Mengen enthalten sind. Er heißt kompakt bzw. Lindelöfraum, wenn jede offene Überdueckung eine endliche bzw. abählbare Teilüberdeckung besitzt.

In einem topologischen Raum X konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen einen Grenzwert $x \in X$, wenn jede Umgebung von x, d.h. jede Menge die eine offene Menge enthält, die x enthält, alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. In einem topologischen Hausdorffraum ist ein solcher Grenzwert eindeutig. In einem allgemeinen topologischen Raum kann eine Folge mehrere Grenzwerte haben. Die Topologie $\tau = \mathcal{P}(X)$ heißt diskrete Topologie. In einem metrischen Raum (X, d) ist eine Teilmenge genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von offenen Bällen ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem topologischen Raum X in einen topologischen Raum Y heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Übungsaufgabe 1.7. *Zeige, dass für metrische Räume diese Definition von Stetigkeit mit der* $\epsilon - \delta$*–Definition übereinstimmt.*

Die Schnittmengen von den offenen Teilmengen eines topologischen Raumes X mit einer Teilmenge $A \subset X$ bilden die offenen Mengen des topologischen Unterraumes A, und die Schnittmengen von abgeschlossenen Teilmengen von X mit A die abgeschloessene Mengen. Das kartesische Produkt zweier topologischer Räume besitzt als offene Mengen beliebige Vereinigungen von kartesischen Produkten von offenen Mengen.

Definition 1.8. *Ein topologischer Raum* X *heißt zusammenhängend, wenn die einzigen Teilmengen von* X*, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind, die leere Menge und der ganze Raum* X *sind. Er heißt lokal zusammenhängend, wenn für jedes* $x \in X$ *jede Umgebung von* x *eine zusammenhängende Umgebung von* x *enthält.*

Satz 1.9. *Eine nicht leere Teilmenge der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall ist. Insbesondere ist also* $\mathbb{R}$ *sowohl zusammenhängend als auch lokal zusammenhängend.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende nicht leere Teilmenge. Dann enthält A mit je zwei Punkten $a < b \in \mathbb{R}$ auch das Intervall $[a, b]$. Wenn nämlich $a < b$ zwei Elemente sind und $x \notin A$ für ein $x \in (a, b)$, dann sind die Teilmengen

$$(-\infty, x) \cap A = (-\infty, x] \cap A \text{ und } (x, \infty) \cap A = [x, \infty) \cap A$$

jeweils offen und abgeschlossen. Also ist dann A nicht zusammenhängend. Wir setzten $\inf A = -\infty$ bzw. $\sup A = \infty$, falls A nach unten bzw. oben unbeschränkt ist. Dann ist A eines der Intervalle $(\inf A, \sup A)$, $[\inf A, \sup A)$, $(\inf A, \sup A]$ und $[\inf A, \sup A]$.

Sei umgekehrt $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $I = A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung von offenen und abgeschlossenen nichtleeren Teilmengen A und B von I. Sei $a \in A$ und $b \in B$ mit $a < b$. Dann ist $[a, b]$ in I enthalten. Sei c das Supremum von $A \cap [a, b]$. Weil A abgeschlossen ist, folgt $c \in A$. Weil A offen in I ist, folgt $(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap I \subset A$ aus $c \in A$ für ein $\epsilon > 0$. Wegen $c < b \in B$ ist das Supremum von $A \cap [a, b] > c$ im Widerspruch zur Definition von c. Also ist jedes Intervall zusammenhängend. **q.e.d.**

Satz 1.10. (i) *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein zusammenhängender Unterraum. Dann ist jede Menge B mit $A \subset B \subset \bar{A}$ zusammenhängend.*

(ii) *Eine beliebige Vereinigung von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes X, deren Schnitt nicht leer ist, ist zusammenhängend.*

(iii) *Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raumes X mit $A_{n+1} \cap A_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ zusammenhängend.*

(iv) *Das Bild eines zusammenhängenden topologischen Raumes unter einer stetigen Abbildung ist zusammenhängend.*

(v) *Das kartesische Produkt zweier topologischer Räume ist genau dann (lokal) zusammenhängend, wenn beide (lokal) zusammenhängend sind.*

Beweis (i): Wenn B eine Vereinigung von zwei offenen disjunkten Teilmengen C und D ist, dann ist auch A eine disjunkte Vereinigung von $(A \cap C) \cup (A \cap D)$. Wenn C und D offen in B sind, dann sind auch $(A \cap C)$ und $(A \cap D)$ offen in A. Weil B die einzige abgeschlossene Teilmenge von B ist, die A enthält, sind $(A \cap C)$ bzw. $(A \cap D)$ genau dann gleich A, wenn C bzw. D gleich B ist. Also ist A nicht zusammenhängend, wenn B nicht zusammenhängend ist. Daraus folgt (i).
(ii): Sei $x \in X$ im Schnitt einer Familie von zusammenhängenden Teilmengen und $A \cup B$ eine disjunkte Vereinigung der Vereinigung der Familie durch offene und abgeschlossene nichtleere Teilmengen. Wir können $x \in A$ annehmen. Dann gibt es mindestens eine zusammenhängende Menge C der Familie, so dass $B \cap C$ nicht leer ist. Dann ist auch $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ eine disjunkte Vereinigung durch offene und abgeschlossene Mengen. $C \cap A$ enthält x und $C \cap B$ ist nicht leer. Das steht im Widerspruch dazu, dass C zusammenhängend ist. Daraus folgt (ii).
(iii): Induktiv folgt aus (ii), dass $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ zusammenhängend sind, und dann (iii).
(iv): Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ und eine offene Teilmenge O von $f[X]$ gibt es eine offene Teilmenge U von Y mit $O = U \cap f[X]$. Dann ist $f^{-1}[O] = f^{-1}[U]$

offen und $f : X \to f[X]$ stetig. Das Urbild einer offenen und abgeschlossenen Menge ist wieder offen und abgeschlossen. Daraus folgt, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung zusammenhängend ist.
(v): Weil die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ stetig und surjektiv sind, sind wegen (iv) auch X und Y zusammenhängend, wenn $X \times Y$ zusammenhängend sind. Für alle $(x, y) \in X \times Y$ bilden die Bilder der Umgebungen von (x, y) unter p_1 bzw. p_2 die Umgebung von x bzw. y. Deshalb sind X und Y auch lokal zusammenhängend, wenn $X \times Y$ lokal zusammenhängend ist. Wenn umgekehrt X und Y (lokal) zusammenhängend, dann sind für alle

$$(x, y) \in X \times Y \text{ auch } X \times \{y\} \text{ und } \{x\} \times Y$$

(lokal) zusammenhängend. Wegen (ii) ist dann

$$(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

zusammenhängend und enthält alle Punkte (z, y) mit $z \in X$. Wegen (ii) ist dann auch

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

zusammenhängend. Für lokal zusammenhängende X und Y folgt, dass jede Umgebung von $(x, y) \in X \times Y$ das kartesische Produkt von zusammenhängenden Umgebungen von x und y enthält, und damit auch eine zusammenhängende Umgebung. **q.e.d.**

Korollar 1.11. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ (lokal) zusammenhängend.* **q.e.d.**

Definition 1.12. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Wegen Satz 1.10 (ii) ist dann die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, zusammenhängend und heißt zusammenhängende Komponente von x in X. Wegen Satz 1.10 (i) sind diese zusammenhängenden Komponenten abgeschlossen. Zwei zusammenhängende Komponenten sind entweder gleich oder disjunkt. Also ist jeder topologische Raum X eine disjunkte Vereinigung seiner zusammenhängenden Komponenten.*

Satz 1.13. *Ein topologischer Raum X ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn die zusammenhängenden Komponenten von allen offenen Teilmengen wieder offen sind.*

Beweis: Sei X ein topologischer Raum, dessen zusammenhängende Komponenten von allen offenen Mengen offen sind. Dann enthält jede offene Umgebung von $x \in X$ eine offene zusammenhängende Komponente von x. Also ist X lokal zusammenhängend.

Sei jetzt X lokal zusammenhängend. Dann ist für jedes $x \in X$ die zusammenhängende Komponente von x in einer offenen Menge eine Umgebung von x. Also sind alle zusammenhängenden Komponenten in offenen Mengen offene, abgeschlossene und zusammenhängende Mengen. **q.e.d.**

Korollar 1.14. *Jeder lokal zusammenhängende Lindelöfraum X hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Sie sind alle offen und abgeschlossen.*

Beweis: Die zusammenhängenden Komponenten eines lokal zusammenhängenden topologischen Raumes X sind offen, paarweise disjunkt und überdecken den Raum. Diese Überdeckung besitzt keine echte Teilüberdeckung, und ein lokalzusammenhängender Lindelöfraum hat höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. **q.e.d.**

Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für je zwei Punkte $x, y \in X$ einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von $x = \gamma(0)$ nach $y = \gamma(1)$ gibt. Dann ist $\gamma([0,1])$ zusammenhängend und damit auch die Vereinigung X der Bilder aller solchen Wege, bei denen x festgehalten wird und y ganz X durchläuft. Im Allgemeinen ist aber nicht jeder zusammenhängende Raum auch wegzusammenhängend. Die Wegzusammenhangskomponenten eines Punktes x ist die Menge aller Punkte $y \in X$, für die ein stetiger Weg von x nach y existiert. Sie ist im allgemeinen kleiner als die entsprechende Zusammenhangskomponente.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r > 0$ ist die Abbildung

$$B(0,r) \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{r - \|x\|}$$

eine stetige Abbildung von $B(0,r)$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \to B(0,r), \quad y \mapsto \frac{ry}{1 + \|y\|}$$

und damit auch stetig. Also sind $B(0,r)$ und $\mathbb{R}^n$ homöomorph (d.h. durch eine bijektive stetige Abbildung und stetige Umkehrabbildung verbunden). Deshalb ist im $\mathbb{R}^n$ jeder offene Ball zusammenhängend. Daraus wird folgen, dass alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten lokal zusammenhängende Lindelöfräume sind, und deshalb höchstens abzählbare disjunkte Vereinigungen von offenen und abgeschlossenen zusammenhängenden Komponenten sind.

1.2 Karten und Atlanten

Definition 1.15. *(Karte) Sei X ein topologischer Raum, dann heißt ein Homöomorphismus ϕ (also eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig ist) von einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ Karte. U heißt der Definitionsbereich und n die Dimension der Karte.*

Wegen dem Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 3.36 ist das Bild einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung nach $\mathbb{R}^n$ wieder offen. Deshalb ist eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $n > m$ nicht injektiv. Andernfalls ist die Verkettung von f mit der Einbettung $i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, 0)$ auf die ersten m Komponenten von $\mathbb{R}^n$ ebenfalls stetig und injektiv. Das Bild einer offenen Menge unter $i \circ f$ ist als Teilmenge des Bildes von i nicht offen, im Widerspruch zu der Invarianz des Gebietes. Insbesondere existiert nur dann ein Homöomorphismus von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist. Deshalb stimmen die Dimensionen zweier Karten, deren Definitionsbereiche nicht schnittfremd sind, überein. Das werden wir aber nicht benutzen. Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit dem gleichen Definitionsbereich U werden verträglich genannt, wenn die Übergangsfunktionen $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})^{-1}$ unendlich oft differenzierbare Abbildungen sind. Weil die zweite Abbildung die Umkehrabbildung der ersten ist, folgt dann, dass die Ableitungen dieser Abbildungen an jeder Stelle von $\phi_1[U]$ bzw. $\phi_2[U]$ bijektive lineare Abbildungen sind von $\mathbb{R}^{n_1}$ auf $\mathbb{R}^{n_2}$. Also stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten mit gleichem Definitionsbereich überein.

Zwei Karten ϕ_1 und ϕ_2 mit verschiedenen Definitionsbereichen U_1 bzw. U_2 heißen verträglich, wenn die beiden Einschränkungen von ϕ_1 und ϕ_2 auf $U_1 \cap U_2$, die offenbar zwei Karten mit gleichem Definitionsbereich sind, miteinander verträglich sind.

Definition 1.16. *(Atlas) Eine Familie von paarweise verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche den topologischen Raum X überdecken, heißt Atlas.*

Eine Karte heißt mit einem Atlas verträglich, wenn sie mit allen Karten des Atlasses verträglich ist. Das ist äquivalent dazu, dass die Vereinigung des Atlasses mit der Karte wieder ein Atlas ist. Zwei Atlanten heißen miteinander verträglich, wenn die Vereinigung der Karten beider Atlanten wieder ein Atlas ist, also alle Karten zusammen paarweise miteinander verträglich sind. Sei jetzt eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $x \in U$ gegeben. Weil die Verkettung von zwei glatten Abbildungen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wieder glatt ist, ist die Bedingung an eine Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^m$, deren Definitionsbereich x enthält (dann ist natürlich $m = n$), dass die Abbildung $\phi|_{V\cap U} \circ (\psi|_{V\cap U})^{-1}$ bei $\psi(x)$ und die Abbildung $\psi|_{V\cap U} \circ \phi|_{V\cap U}$ bei $\phi(x)$ glatt ist, für alle miteinander verträglichen Karten $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ äquivalent, deren Definitionsbreiche x enthalten. Also ist die gegebene Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann mit einem Atlas verträglich, wenn es für jedes $x \in U$ eine solche Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ im Atlas gibt, die die Bedingung erfüllt. Dann ist eine mit einem Atlas verträgliche Karte auch mit einem mit dem Atlas verträglichen Atlas verträglich. Insbesondere stimmen die mit jeweils einem von zwei gegebenen Atlanten verträglichen Karten genau dann überein, wenn die beiden Atlanten verträglich sind, und die Verträglichkeit von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation. Ein gesättigter Atlas ist ein maximaler Atlas, der also alle mit diesem Atlas verträglichen Karten enthält. Jede Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten enthält offenbar genau einen gesättigten Atlas und jeder gesättigte Atlas definiert genau eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten, nämlich alle Atlanten, die in dem gesättigten Atlas enthalten sind.

Obwohl jeder metrische Raum ein Haudorffraum ist, ist nicht jeder topologische Raum mit einem Atlas ein Hausdorffraum. Sei $X = \mathbb{R} \cup \{0^*\}$ der topologische Raum dessen offene Mengen aus den offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ bestehen und Mengen der Form $\{0^*\} \cup O$ bzw. $\{0^*\} \cup (O \setminus \{0\})$, wobei O eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ ist. Dann ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ eine Karte mit Definitionsbereich $X \setminus \{0^*\}$ und $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ mit $0^* \mapsto 0$ eine Karte mit Definitionsbereich $X \setminus \{0\}$. Zusammen bilden sie einen Atlas. Die beiden Punte 0 und 0^* besitzen allerdings keine schnittfremden Umgebungen und X ist kein Haudorffraum. Um solche Beispiele auszuschließen definieren wir

Definition 1.17. *(Mannigfaltigkeit) Ein topologischer Hausdorff– und Lindelöfraum X zusammen mit einem Atlas heißt differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Unter einer Karte einer differnzierbaren Mannigfaltigkeite verstehen wir im folgenden immer eine mit dem Atlas verträgliche Karte. Nicht jeder topologische Raum besitzt einen Atlas. Offenbar besitzt jeder Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, (oder eines topologischen Raumes mit einem Atlas) eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. So ist

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

keine Mannigfaltigkeit, weil der Punkt $(0, 0)$ keine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Das sieht man daran, dass alle ϵ–Bälle um $(0, 0)$ ohne den Punkt $(0, 0)$ 4 zusammenhängende Komponenten besitzen, also vier offene und abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\epsilon > 0$ hat aber $B(x, \epsilon) \setminus \{x\}$ genau eine zusammenhängende Komponente, wenn $n > 1$ ist und zwei, wenn $n = 1$. Wie wir gesehen haben, stimmen die Dimensionen von zwei verträglichen Karten, deren Definitionsbereiche beide einen Punkt $x \in X$ enthalten überein. Die Dimension einer differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist die Funktion, die jedem Punkt $x \in X$ die Dimension einer Karte aus dem Atlas zuordnet, deren Definitionsbereich x enthält. Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung, auf der die Dimension der Mannigfaltigkeit konstant ist. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, offen. Wenn $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge ist, dann stimmen die Dimensionen von X an den Punkten $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für große m mit der Dimension von X am Grenzwert von $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ überein. Deshalb sind die Teilmengen von X, auf denen die Dimension gleich einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist, auch abgeschlossen, und deshalb Vereinigungen von zusammenhängenden Komponenten von X. Insbesondere hat eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit nur eine Dimension. Eine nicht zusammenhängende differenzierbare Mannigafltigkeit kann mehrere Dimensionen haben.

Beispiel 1.18. (i) *Jeder höchstens abzählbare diskrete Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0. *Umgekehrt ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension* 0 *ein höchstens abzählbarer diskreter Raum.*

(ii) *Jeder endlichdimensionale* $\mathbb{R}$*–Vektorraum* V *ist für ein* $n \in \mathbb{N}$ *isomorph zu* $\mathbb{R}^n$ *und besizt einen Atlas mit nur einer linearen Karte. Alle linearen Karten sind miteinander verträglich. Damit wird* V *zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit von der gleichen Dimension wie* V*. Die Topologien aller Normen von* V *stimmen alle überein, und die entsprechenden Atlanten sind alle miteinander verträglich.*

(iii) *Sei* $\mathbb{R}^{n+1}$ *der* $(n+1)$*–dimensionale Euklidische Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt und der entsprechenden Norm. Seien* $e_0, \ldots, e_n$ *die natürliche Basis von* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Unter der* n*–dimensionalen Sphäre verstehen wir die Teilmenge*

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Im folgenden machen wir $\mathbb{S}^n$ *auf natürliche Weise zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dafür definieren wir eine Variante der stereographische Projektion:*

$$\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n$$

Zunächst identifizieren wir den $\mathbb{R}^n$ *mit der Teilmenge*

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\} = \{0e_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dann bildet die Variante stereographische Projektion $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ *(ohne den Nordpol) auf den Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol und den Punkt von* $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ *mit der Ebene* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ab. Sei* $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$*. Dann besteht die Gerade durch den Nordpol und der Punkt* x *aus den Punkten* $\{e_0 + t(x - e_0) \mid t \in \mathbb{R}\}$*. Sie schneidet die Hyperebene* $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, e_0\rangle = 0\}$ *in dem Punkt mit*

$$\langle e_0 + t(x - e_0), e_0\rangle = 1 - t + t\langle x, e_0\rangle = 0,$$

$$\textit{also} \quad t = \frac{1}{1 - \langle x, e_0\rangle} \ \textit{und}\ y = e_0 + \frac{x - e_0}{1 - \langle x, e_0\rangle}.$$

Die Länge des Bildvektors ist dann gegeben durch

$$\|y\| = \left\| e_0 + \frac{(x - e_0)}{1 - \langle x, e_0\rangle} \right\| = \left\| \frac{x - e_0\langle x.e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle} \right\| = \sqrt{\frac{\langle x - \langle x, e_0\rangle e_0, x - \langle x, e_0\rangle e_0\rangle}{(1 - \langle x, e_0\rangle)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1 - 2\langle x, e_0\rangle^2 + \langle x, e_0\rangle^2}{(1 - \langle x, e_0\rangle)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \langle x, e_0\rangle}{1 - \langle x, e_0\rangle}}.$$

Also ist $\langle x, e_0\rangle$ gegeben durch

$$\langle x, e_0\rangle = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$

und x ist gegeben durch

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + (1 - \langle x, e_0\rangle)y \quad = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} e_0 + \frac{2y}{\|y\|^2 + 1} \quad = \frac{(\|y\|^2 - 1)e_0 + 2y}{\|y\|^2 + 1},$$

wobei wir $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Also ist die Variante der stereographische Projektion ein Homöomorphismus von $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0\}$ nach $\mathbb{R}^n$. Wenn wir diese Variante der stereographischen Projektion an der Hyperebene $\mathbb{R}^n$ spiegeln, also e_0 durch $-e_0$ ersetzt, dann erhalten wir den Homöomorphismus

$$\mathbb{S}^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto y = -e_0 + \frac{x + e_0}{1 + \langle x, e_0\rangle}.$$

Die Verkettung der Einschränkung der obigen Abbildung $y \mapsto x$ auf $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit der dieser Abbildung auf $\mathbb{S}^n \setminus \{e_0, -e_0\}$ ergibt die analytische Abbildung

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad y \mapsto -e_0 + \left(\frac{(\|y\|^2 - 1)e_0 + 2y}{\|y\|^2 + 1} + e_0\right) \frac{\|y\|^2 + 1}{2\|y\|^2} = \frac{y}{\|y\|^2}$$

Wegen Satz 1.10 (ii) ist $\mathbb{S}^n$ als eine nicht disjunkte Vereinigung zweier zusammenhängender Mengen zusammenhängend. Dadurch wird $\mathbb{S}^n$ zu einer zusammenhängenden differenzierbaren kompakten Mannigfaltigkeit.

(iv) *Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, deren Gradient ∇f keine gemeinsamen Nullstellen mit f hat. Dann gibt es aufgrund der Voraussetzung an f für jedes Element $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Nullstellenmenge ein $i \in \{0, \ldots, n\}$, so dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es dann eine genauso oft wie f stetig differenzierbare Funktion g von der Schnittmenge von $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ mit einer Umgebung von x nach $\mathbb{R}$, so dass die Schnittmenge der Nullstellenmenge von f mit der Umgebung von x gleich dem Graphen von g auf der Umgebung von x ist, also gleich der Menge $z(y) = y + g(y)e_i$ wobei y die Schnittmenge von $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0\}$ mit der Umgebung von x durchläuft. Die natürliche Projektion von der Umgebung von x auf diese Schnittmenge, die jedem z das y mit den gleichen Koordinaten, bis auf die i–te Koordinate, zuordnet (also $y = z - \langle z, e_i\rangle e_i$) ist offenbar glatt und die Umkehrabbildung von der Abbildung $y \mapsto y + g(y)e_i$. Deshalb ist die Schnittmenge der Nullstellenmenge von f mit der Umgebung von x diffeomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Offenbar ist* *die Nullstellenmenge als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ ein metrischer Raum und damit auch ein Hausdorffraum. Mit $\mathbb{R}^{n+1}$ ist auch die Nullstellenmenge eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen, also wegen Satz 1.29 ein Lindelöfraum und damit eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Mit der Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \|x\|^2 - 1$ erhalten wir wieder, dass die n–dimensionale Sphäre eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 1.19. *Anstatt von den Übergangsfunktionen zu fordern, dass sie unendlich oft differenzierbar sind, kann man auch r mal–stetig differenzierbar, oder analytisch oder (für komplexe Mannigfaltigkeiten, bei denen wir $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{C}^n$ ersetzen) holomorphe Übergangsfunktionen fordern. Dann entstehen C^r bzw. analytische, bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten. Wenn wir nur stetige Übergangsfunktionen fordern, sprechen wir von topologischen Mannigfaltigkeiten. Ein gesättigter Atlas (bzw. eine Äquivalenzklasse von verträglichen Atlanten) wird auch differenzierbare Struktur genannt. Es gibt im Allgemeinen viele verschiedene Äquivalenzklassen von Atlanten. Aber die meisten dieser differenzierbaren Strukturen werden durch Homöomorphismen aufeinander abgebildet.*

Übungsaufgabe 1.20. *Gebe einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an, der die differenzierbare Struktur von dem Vektorraum $\mathbb{R}$ mit Norm $|\cdot|$ auf eine nicht verträgliche differenzierbare Struktur abbildet.*

Definition 1.21. *Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y heißen diffeomorph, wenn es einen Homöomorphismus $\Phi : X \to Y$ gibt, dessen Verkettung mit allen Karten des Atlas von Y mit dem Atlas von X verträgliche Karten von X bilden.*

Die meisten nicht miteinander verträglichen differenzierbaren Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind also diffeomorph. Diese Relation auf dem Raum aller differenzierbaren Strukturen ist offenbar eine weitere Äquivalenzrelation, neben der Verträglichkeit von Atlanten. Für eine gegebene differenzierbare Mannigfaltigkeit stellt sich dann die Frage, wieviel verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen sie besitzt. Für den Fall von eindimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich leicht zeigen, dass alle verschiedenen differenzierbaren Strukturen zueinander diffeomorph sind. Allgemein gilt, dass auf niedrigdimensionalen Mannigfaltigkeiten alle differenzierbaren Strukturen diffeomorph sind. Wenn die Dimension größer als vier ist, kann es verschiedene differenzierbare Strukturen geben. Im besonders schweren Fall der Dimension vier (z.B. $\mathbb{R}^4$) wurde durch eine von der Physik inspirierte Theorie von Donaldson in den achtziger Jahren gezeigt, dass es auch unendlich viele verschiedene nicht zueinander diffeomorphe differenzierbare Strukturen geben kann.

1.3 Differenzierbare Abbildungen

Definition 1.22. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $p \in \mathbb{N}_0$ und $x \in X$. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ in x p mal (stetig) differenzierbar (bzw. glatt), wenn für zwei mit den Atlanten von X bzw. Y verträgliche Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ mit $x \in U$, $f(x) \in V$ und $U \subset f^{-1}[V]$ folgende Abbildung von $\phi[U] \subset \mathbb{R}^n$ auf $\psi[V] \subset \mathbb{R}^m$ bei $\phi(x)$ p mal (stetig) differenzierbar bzw. glatt ist:*

$$\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \psi[V], y \mapsto \psi(f(\phi^{-1}(y))).$$

Diese Bedingung ist offenbar unabhängig von der Wahl der Karten. Für jedes $x \in X$ gibt es immer zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^M$ im Atlas von X bzw. Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Den Definitionsbreich U kann man dann immer so einschränken, dass $x \in U \subset f^{-1}[V]$ gilt.

Damit können wir die Differentialrechnung von dem $\mathbb{R}^n$ auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wir benutzen dabei immer lokal Karten und erhalten so Abbildungen von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^m$. Im Folgenden werden wir noch viele weitere Strukturen der Differentialrechnung auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ weiterentwickeln und mit Hilfe der Karten auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Wichtig dabei ist, dass die entsprechenden Aussagen so formuliert werden, dass sie nicht von der Wahl der Karte aus dem Atlas abhängen.

Beispiel 1.23. *Im Folgenden werden wir $\mathbb{R}$ oder auch jeden endlichdimensionalen Vektorraum mit der differenzierbaren Struktur aus dem Beispiel (ii) ausstatten und als differenzierbare Mannigfaltigkeit ansehen. Also sind alle p mal stetig differenzierbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert. Wir wollen diesen Raum $C^p(X, \mathbb{R})$ nennen. Weil die p mal differenzierbare Funktion von einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ eine Algebra bilden, ist auch $C^p(X, \mathbb{R})$ bzw. $C^\infty(X, \mathbb{R})$ eine Algebra.*

Übungsaufgabe 1.24. *Zeige, dass zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten X und Y genau dann diffeomorph sind, wenn es eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ gibt, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch glatt ist.*

Beispiel 1.25. **(i)** *Sei $\mathbb{R}^n$ der Euklidische n–dimensionale Raum mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Dann ist die Abbildung*

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{2x}{1 - \|x\|^2}$$

ein Diffeomorphismus von $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Sei nämlich $y = \frac{2x}{1-\|x\|^2}$. Dann gilt für $\|x\| < 1$ auch $\|x\|^2 > 0$. Also folgt $\|y\| = \frac{2\|x\|}{1-\|x\|^2}$ oder auch $\|y\|\|x\|^2 +$

$2\|x\| - \|y\| = 0$. *Also gilt*

$$\|x\| = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\|y\|^2}}{2\|y\|} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \|y\|^2}}{\|y\|}.$$

Wegen $0 \leq \|x\| < 1$ *folgt*

$$\|x\| = \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{\|y\|}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x = \frac{y(1 - \|x\|^2)}{2} \quad &= \frac{y}{2} \frac{\|y\|^2 - 1 + 2\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1 - \|y\|^2}{\|y\|^2} \\ &= y \frac{\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1}{(\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1)(\sqrt{1 + \|y\|^2} - 1)} \qquad = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2} + 1} \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ *wohldefiniert und das Bild liegt in* $B(0,1)$. *Die Abbildungen* f *und ihre Umkehrabbildung sind sogar analytische Abbildungen, also auch Diffeomorphismen von* $B(0,1)$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *nach* $B(0,1)$.

(ii) *Die Abbildung* $g : x \to \frac{x}{\|x\|^2}$ *ist offenbar eine Involution:*

$$\frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\|\frac{x}{\|x\|^2}\|^2} = \frac{x\|x\|^4}{\|x\|^2\|x\|^2} = x.$$

g *ist also ein analytischer Diffeomorphismus von* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Sie bildet das Äußere* $\{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| > 1\}$ *der Einheitskugel auf* $B(0,1) \setminus \{0\}$ *ab. Zusammen mit der Abbildung* f *aus (i) ergibt sie einen analytischen Diffeomorphismus des Äußeren der Einheitskugel nach* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.4 Zerlegung der Eins

In diesem Abschnitt führen wir eine sogenannte Zerlegung der Eins ein. Das ist eine abzählbare Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht negativen glatten Funktionen mit Werten in dem Intervall $[0,1]$, deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ gleich Eins ist. Diese Summe soll dabei immer lokal endlich sein, d.h. für jedes x einer gegebenen Mannigfaltigkeit, soll es eine Umgebung geben, auf der nur endlich viele der Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verschwinden. Dadurch ist die Summe immer eine endliche Summe und deshalb auch ohne Konvergenz wohldefiniert. Mithilfe einer solchen Zerlegung der Eins wollen wir die Funktionen bzw.

Vektorfelder bzw. Differentialformen (diese werden später eingeführt) in Summen von Funktionen bzw. Vektorfeldern bzw. Differentialformen zerlegen, die nur innerhalb einer kleinen offenen Menge nicht verschwinden. Also sollen die einzelnen Funktionen der Zerlegung der Eins nur innerhalb von (kleinen) offenen Mengen nicht verschwinden.

Definition 1.26. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen $[0,1]$–wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X heißt Zerlegung der Eins, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) (Lokale Endlichkeit) *Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, auf der alle bis auf endlich viele Funktionen der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschwinden.*

(ii) *Für alle $x \in X$ gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1$. Wegen (i) ist diese Summe immer endlich.*

In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.27. *(Existenz einer glatten Zerlegung der Eins) Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X, so dass alle Funktionen f_n außerhalb einer kompakten Teilmenge einer der offenen Mengen $U_n \in \mathcal{U}$ der Übereckung verschwinden.*

Wenn zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ eine solche Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, dann gibt es offenbar eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen in $\mathcal{U}$, so dass jedes f_n außerhalb von U_n verschwindet. Wegen der Bedingung (ii) ist die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ sein. Insbesondere ist X ein Lindelöfraum. Wir betrachten zunächst lokalkompakte Hausdorffräume.

Definition 1.28. *Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.*

Wegen Heine-Borel sind alle endlichdimensionalen euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt. Deshalb ist ein topologischer Raum mit einem Atlas lokal kompakt. Also sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten lokal kompakte topologische Hausdorffräume.

Satz 1.29. *Für einen lokalkompakten Hausdorffraum X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Es gibt eine wachsende Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen von X mit kompaktem Abschluss $\bar{O}_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bar{O}_n \subset O_{n+1}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$.*

(ii) *X ist eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen.*

(iii) *X ist ein Lindelöfraum*

Beweis: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{O}_n$ der kompakten Mengen $(\bar{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (i) überdeckt X, und (ii) folgt aus (i).

Wenn X (ii) erfüllt, dann wird jede der kompakten Teilmengen durch endlich viele Elemente einer offenen Überdeckung von X überdeckt. Die abzählbare Vereinigung aller dieser endlichen Teilüberdeckungen bildet eine abzählbare Teilüberdeckung von ganz X. Also folgt (iii) aus (ii).

Sei jetzt X ein lokalkompakter Hausdorff– und Lindelöfraum. Dann besitzt jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x. Wir zeigen jetzt, dass K_x in X abgeschlossen ist. Sei also $y \in X \setminus K_x$, Dann gibt es für jeden Punkt $z \in K_x$ zwei disjunkte offene Mengen V_z und U_z, mit $y \in V_z$ und $z \in U_z$. Die offene Überdeckung $(U_z)_{z\in K_x}$ von K_x besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Die Schnittmenge V der entsprechenden V_z's ist eine Umgebung von y und disjunkt von der Vereinigung der entsprechenden U_z's also von K_x. Also ist y nicht im Abschluss von K_x enthalten, und damit K_x abgeschlossen. Für alle $x \in X$ sei also $W_x \subset K_x$ in X offen mit $x \in W_x$. Die Schnittmenge $\bar{W}_x \cap K_x$ des Abschlusses $\bar{W}_x$ in X ist dann abschlossenen, also gleich $\bar{W}_x$. Jede Überdeckung von $\bar{W}_x$ durch offenen Teilmengen von K_x wird durch hinzufügen von $K_x \setminus \bar{W}_x$ zu einer Überdeckung von K_x, die eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Also ist $\bar{W}_x$ kompakt. Damit gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung W_x mit kompaktem Abschluss. Sei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung der offenen Überdeckung $(W_x)_{x\in X}$. Wir definieren induktiv eine aufsteigende Folge $\{1\} = N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ von endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:
(i) $n + 1 \in N_{n+1}$, **(ii)** $(W_m)_{m\in N_{n+1}}$ ist eine endliche Überdeckung von $\bigcup_{m\in N_n} \bar{W}_m$.
Dann erfüllt die Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $O_n = \bigcup_{m\in N_n} W_m$ die Bedingung (i). **q.e.d.**

Man kann zeigen[1], dass jeder lokalkompakte Hausdorffraum X, der eine dieser Bedingungen erfüllt, metrisierbar ist, d.h. es gibt eine Metrik auf X mit den gleichen offenen Mengen wie X. Außerdem ist ein metrischer Raum genau dann ein Lindelöfraum, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, also separabel ist. Insbesondere sind alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten separabel und metrisierbar.

Lemma 1.30. *Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Karten mit Definitionsbereichen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ϕ_n ein Diffeomorphismus von U_n auf einen Ball $B(0,2) \subset \mathbb{R}^m$.*

(ii) *$(\phi_n^{-1}[B(0,1)])_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X.*

[1] Dazu zeigt man zuerst, dass jeder lokal kompakte Hausdorffraum regulär ist, d.h. für jedes Paare (x, A) von einem Punkt x und einer abgeschlossenen Menge A mit $x \notin A$ sind x und A jeweils in einer von zwei disjunkten offenen Mengen enthalten. Danach folgt aus Chapter 6, Lemma 4.4 in J.M. Munkres: Topology, dass ein regulärer Lindelöfraum parakompakt ist. Zuletzt zeigt Chapter 6, Theorem 5.1 aus J.M. Munkres: Topology, dass ein solcher Raum mit einem Atlas metrisierbar ist.

(iii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n in einer offenen Menge von $\mathcal{U}$ enthalten.*

(iv) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist U_n mit höchstens endlich vielen Elementen von $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nicht schnittfremd.*

Beweis: Jeder Punkt $x \in X$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist im Definitionsbreich einer glatten Karte ϕ_x enthalten, die x auf 0 abbildet. Außerdem ist x in einer der offenen Mengen der Überdeckung enthalten. Indem wir die Karten $(\phi_x)_{x\in X}$ auf kleine offene Umgebungen von x einschränken, und gegebenfalls um einen geeigneten positiven Faktor strecken, erhalten wir Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die $\phi_x(x) = 0$ und sowohl (i) als auch (iii) erfüllen. Also gibt es für jede Überdeckung $\mathcal{U}$ von X eine Überdeckung von X durch Definitionsbreiche von Karten $(\phi_x)_{x\in X}$, die $\phi_x(x) = 0$, (i) und (iii) erfüllen.

Die differenzierbare Mannigfaltigkeit X ist ein lokalkompakter Hausdorff– und Lindelöfraum. Deshalb gibt es eine Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von offenen Mengen, die (i) aus dem Satz 1.29 erfüllt. Wir ergänzen $O_0 = O_{-1} = \emptyset$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt jedes $x \in \bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ im Definitionsbreich einer glatten Karte von X, die x auf 0 abbildet und die Bedingungen (i) und (iii) erfüllt. Zusätzlich können wir annehmen, dass der Definitionsbreich in der offenen Umgebung $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ von x enthalten ist. Dann besitzt die kompakte Teilmenge $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ eine endliche Teilüberdeckung durch die Urbilder der offenen Bälle $B(0, 1)$ bezüglich dieser Karten. Also besitzt $\bar{O}_1$ eine endliche Überdeckung durch die Urbilder von $B(0, 1)$ bezüglich solcher Karten, deren Definitionsbereiche in O_2 enthalten sind. Und $\bar{O}_2 \setminus O_1$ besitzt eine endliche Überdeckung durch die Urbilder von $B(0, 1)$ bezüglich solcher Karten, deren Definitionsbreiche in O_3 enthalten sind. Alle diese abzählbar vielen endlichen Überdeckungen erfüllen zusammen offenbar (i)-(iii). Die Definitionsbereiche der Karten der Überdeckungen von $\bar{O}_n \setminus O_{n-1}$ und $\bar{O}_m \setminus O_{m-1}$ sind in $O_{n+1} \setminus \bar{O}_{n-2}$ bzw. $O_{m+1} \setminus \bar{O}_{m-2}$ enthalten, also für $|n - m| > 2$ schnittfremd. Deshalb erfüllen alle diese Karten zusammen auch die Bedingung (iv). **q.e.d.**

Beweis der Existenz der Zerlegung der Eins (Satz 1.27): Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann ist die reelle Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad x \mapsto f_{a,b}(x)$ mit

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \le a \\ \exp(\frac{1}{x-b}\exp(\frac{1}{a-x})) & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{für } b \le x \end{cases}$$

eine glatte Funktion. Für alle $r > 0$ ist dann die Funktion $g(x) = f_{1,3/2}(\|x\|)$ eine glatte Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$, die auf $B(0, 1)$ gleich 1 ist und außerhalb von $B(0, 3/2)$ verschwindet. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ $\phi_n : U_n \to B(0, 2)$ die Folge von Karten, die (i)–(iv) aus dem vorangehenden Lemma erfüllt. Dann setzen wir die Funktion $h_n = g \circ \phi_n$ zu einer glatten Funktion auf X fort, indem wir sie außerhalb des Definitionsbereichs U_n

der Karte ϕ_n gleich Null setzen. Wir definieren jetzt eine Zerlegung der Eins $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f_n = h_n \prod_{l=1}^{n-1}(1-h_l) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f_1 + \ldots + f_n + f_{n+1} = 1 - \prod_{l=1}^{n}(1-h_l) + h_{n+1}\prod_{l=1}^{n}(1-h_l) = 1 - \prod_{l=1}^{n+1}(1-h_l).$$

Wegen der Bedingung (ii) ist jedes $x \in X$ für ein $n \in \mathbb{N}$ in $\phi_n^{-1}[B(0,1)] \subset U_n$ enthalten. Wegen der Bedingung (iv) sind auf U_n nur endlich viele Funktionen h_n ungleich Null. Deshalb erfüllt diese Folge die Bedingung der lokalen Endlichkeit. Auf $\phi^{-1}[B(0,1)]$ ist $(1-h_n)$ gleich Null. Deshalb ist die Summe $\sum f_n$ aller f_n überall gleich Eins. Wegen der Bedingung (iii) verschwindet jedes f_n außerhalb der kompakten Teilmenge $\phi^{-1}[\overline{B(0,3/2)}]$ einer der offenen Mengen von $\mathcal{U}$. **q.e.d.**

Zum Abschluss können wir noch alle Elemente einer solchen Zerlegung der Eins, die außerhalb derselben offenen Menge in $\mathcal{U}$ verschwinden, zu einer Funktion aufsummieren. Das ist wegen der lokalen Endlichkeit offenbar möglich. Dadurch können wir erreichen, dass die abzählbare Familie der Funktionen der Zerlegung der Eins durch eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von $\mathcal{U}$ durchnummeriert wird.

Korollar 1.31. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine Teilmenge und g eine reelle Funktion auf A. Gibt es für jedes $x \in \bar{A}$ im Abschluss von A eine offene Umgebung V_x von x in X und eine glatte Funktion f_x auf V_x, die auf $V_x \cap A$ mit g übereinstimmt, dann gibt es für jede offene Menge U, die $\bar{A}$ enthält eine glatte Funktion f auf X, die auf A mit g übereinstimmt, und außerhalb von U verschwindet.*

Beweis: Wir schränken für alle $x \in A$ die Menge V_x und die Funktion f_x auf $V_x \cap U$ ein. Für alle $x \in X \setminus \bar{A}$ sei V_x eine offene Umgebung von x in $X \setminus A$ und $f_x = 0$ auf dieser Menge. Die offene Überdeckung $(V_x)_{x\in X}$ von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit entsprechenden Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer entsprechenden Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Funktion $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n f_n$ leistet das Gewünschte. **q.e.d.**

Wir nennen Funktionen g, die die Bedingungen des Korollars erfüllen auf $\bar{A}$ unendlich oft differenzierbar. Analog werden r mal stetig differenzierbare Funktionen auf abgeschlossenen Teilmengen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten definiert.

1.5 Tangentialraum

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Tangentialvektoren auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. In jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ können wir den Raum aller infinitesimalen Richtungen von differenzierbaren Funktionen von reellen Intervallen in den $\mathbb{R}^n$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Durch die Karten des Atlases können wir das auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Um diese Tangentialvektoren, die die infinitesimalen Richtungen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit beschreiben, aber so einzuführen, dass ihre Definition nicht von der Wahl der Karte abhängen, definieren wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf dem Raum der Abbildungen zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.32. *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $x \in X$. Außerdem seien f_1 und f_2 zwei auf einer offenen Umgebung von x stetige und in x differenzierbare Abbildungen nach Y. Wir sagen, dass sich die beiden Abbildungen f_1 und f_2 in dem Punkt x berühren, wenn $f_1(x) = f_2(x) = y$ und bezüglich einer Karte ϕ von X im Punkt x und einer Karte ψ von Y im Punkt y die Ableitung von $\psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$ und $\psi \circ f_2 \circ \phi^{-1}$ im Punkt $\phi(x)$ als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen.*

Wegen der Kettenregel ist diese Aussage unabhängig von den Karten ϕ und ψ von X bzw. Y in den Punkten x bzw. y. Aus der Definition folgt auch sofort, dass diese Relation eine Äquivalenzration zwischen solchen Abbildungen ist.

Definition 1.33. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Die Menge der Äquivalenzklassen aller stetigen im Punkt 0 differenzierbaren und sich dort berührenden Abbildungen von $(-\epsilon, \epsilon)$ nach X, die 0 auf x abbilden, heißt Tangentialraum von X im Punkt x und wird mit $T_x X$ bezeichnet. Seine Elemente heißen Tangentialvektoren im Punkt x.*

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^m$ ist die Abbildung $t \mapsto w + tv$ unendlich oft differenzierbar und hat bei $t = 0$ die Ableitung $t \mapsto tv$. Umgekehrt berührt jede in 0 differenzierbare Abbildung $x : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^m$, mit $x(0) = w$, die Abbildung $t \mapsto w + tv$ mit $v = \dot{x}(0)$ im Punkt $t = 0$. Dadurch wird der Tangentialraum $T_w W$ von einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^m$ im Punkt $w \in W$ auf eindeutige Art und Weise mit dem Vektorraum $v \in \mathbb{R}^m$ identifiziert. Für jede in 0 differenzierbaren Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to W$, die 0 auf $w \in W$ abbildet, ist die Verkettung mit einer in $w \in W$ differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^n$ eine in 0 differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$, die 0 auf $f(w)$ abbildet. Die Verkettung mit f bildet dabei sich berührende Abbildungen auf sich berührende Abbildungen ab und induziert ein Abbildung $T_x(f) : T_x W \to T_{f(x)} \mathbb{R}^n$. Wenn wir dabei $T_x W$ mit $\mathbb{R}^m$, und $T_{f(x)} \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren, dann wird $T_x(f)$ mit $v \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} f(w + tv) = f'(w)(v)$ idenifiziert. Insgesamt entspricht also $T_x(f)$ der Ableitung

$$f'(w) : \mathbb{R}^m \simeq T_w W \to \mathbb{R}^n \simeq T_{f(w)} \mathbb{R}^n.$$

Weil die Ableitung eine lineare Abbildung ist, ist diese Abbildung eine lineare Abbildung von dem Vektorraum $\mathbb{R}^m$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Das wollen wir auf differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten übertragen.

Beispiel 1.34. *Wir haben gerade gesehen, dass sich für alle $w \in \mathbb{R}^m$ der Tangentialraum $T_w\mathbb{R}^m$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren lässt. Wenn allgemeiner V ein normierter Vektorraum ist, dann ist für alle $w, v \in V$ die Abbildung $t \mapsto w + tv$ unendlich oft differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch $t \mapsto tv$. Jede differenzierbare Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \to V$, $t \mapsto v(t)$, die 0 auf w abbildet, berührt offenbar genau die den Vektoren w und $v = \frac{dv(t)}{dt}|_{t=0}$ entsprechende obige Abbildung. Dadurch wird der Tangentialraum T_wV auf natürliche Weise mit V identifiziert.*

Definition 1.35. *Sei $f : X \to Y$ eine in $x \in X$ differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und seien $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten von X und Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Dann ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $W = \phi[f^{-1}[V] \cap U] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. Die Verkettung mit $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ bildet sich in 0 berührende Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to W$, die 0 auf $\phi(x)$ abbilden, auf sich in 0 berührende Abbildungen $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ ab, die 0 auf $\psi(f(x))$ abbilden. Deshalb induziert die Verkettung mit f eine Abbildung vom Tangentialraum T_xX von X bei $x \in X$ in den Tangentialraum $T_{f(x)}Y$ von Y bei $f(x) \in Y$. Diese Abbildung wird mit $T_x(f)$ bezeichnet. Die Vereinigung aller dieser Abbildungen wird mit $T(f)$ bezeichnet:*

$$T(f) : TX = \bigcup_{x \in X} T_xX \to TY = \bigcup_{y \in Y} T_yY.$$

Satz 1.36. **(i)** *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$. Dann induziert jede Karte ϕ um $x \in X$ eine bijektive Abbildung $T_x(\phi)$ von T_xX auf den Vektorraum $T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m$. Dieser Isomorphismus induziert auf T_xX eine Vektorraumstruktur über $\mathbb{R}$, die nicht von der Karte ϕ abhängt.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine im Punkt $x \in X$ differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und Y. Dann ist die folgende Abbildung linear:*

$$T_x(f) : T_xX \to T_{f(x)}Y.$$

(iii) *Seien $f : X \to Y$ in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ in $f(x)$ differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Dann ist $g \circ f$ in x differenzierbar und es gilt*

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f).$$

(iv) *Eine differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist genau dann lokal konstant, wenn $T_x(f) = 0$ für alle $x \in X$.*

(v) *Zwei differenzierbare Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten berühren sich genau dann im Punkt $x \in X$, wenn $f(x) = g(x)$ und $T_x(f) = T_x(g)$ gilt.*

Beweis: Wir zeigen zuerst (iii): Seien also $f : X \to Y$ in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ in $f(x)$ differenzierbar, und seien $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ und $\xi : W \to \mathbb{R}^l$ Karten von X, Y und Z mit $x \in U$, $f(x) \in V$ und $g(f(x)) \in W$. Sei $V' = g^{-1}[W] \cap V$ und $U' = f^{-1}[V'] \cap U$. Dann ist $\xi \circ g \circ \psi^{-1}$ eine in $\psi(f(x))$ differenzierbare Abbildung von $\psi'[V'] \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^l$ und $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $\phi[U'] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\psi[V'] \subset \mathbb{R}^n$. Ihre Verkettung ist die in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung $\xi \circ g \circ f \circ \phi^{-1}$ von $\phi[U'] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^l$. Das zeigt, dass $g \circ f$ in x differenzierbar ist, wenn f in x und g in $f(x)$ differenzierbar sind.

Für jede in 0 differenzierbare Abbildung $y : (-\epsilon, \epsilon) \to X$, die 0 auf x abbildet, ist $f \circ y$ eine in 0 differenzierbare Abbildung $(\epsilon, \epsilon) \to Y$, die 0 auf $f(x)$ abbildet. Die Verkettung $g \circ (f \circ y)$ von $f \circ y$ mit g ist dann eine in 0 differenzierbare Abbildung, die 0 auf $g(f(x))$ abbildet. Wegen $g \circ (f \circ y) = (g \circ f) \circ y$ ist diese Abbildung auch die Verkettung von y mit $g \circ f$. Dann folgt $T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f)$ aus der Definition von $T_x(f)$, $T_{f(x)}(g)$ und $T_x(g \circ f)$. Das zeigt (iii).

Offenbar gilt $T_x(\mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{T_x X}$ für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X und $x \in X$. Dann folgt aus (iii), dass für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und jedes $x \in U$ die Abbildung $T_{\phi(x)}(\phi^{-1})$ die inverse von $T_x(\phi)$ ist. Also sind alle diese Abbildungen bijektiv.

Als nächstes wählen wir in der Situation von (ii) zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ von Y mit $x \in U$ und $f(x) \in V$. Dann ist $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ eine in $\phi(x)$ differenzierbare Abbildung von $\phi[f^{-1}[V] \cap U] \subset \mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. Ihre Tangentialabbildung $T_{\phi(x)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ ist dann die lineare Abbildung

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) : \mathbb{R}^m \simeq T_{\phi(x)}\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \simeq T_{\psi(f(x))}\mathbb{R}^n.$$

Für den Fall $Y = X$ and $f = \mathbb{1}_X$ folgt, dass die Karten ϕ und ψ auf $T_x X$ die gleiche Vektorraumstruktur definieren, also (i). Danach folgt (ii).

Die beiden Aussagen (iv) und (v) sind für offene Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$ klar. Der allgemeine Fall folgt dann aus (i)-(iii). **q.e.d.**

Wir können jetzt den Satz der inversen Funktion umformulieren.

Satz 1.37. *Sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f : X \to Y$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Wenn $T_x(f)$ für ein $x \in X$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \ni x$ und $V \ni f(x)$, so dass $f|_U$ ein Homöomorphismus von U auf V ist und $(f|_U)^{-1}$ r mal stetig differenzierbar ist.*

Beweis: Wähle Karten $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ von X und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ und $f(x) \in V$ und wende den Satz der inversen Funktion auf $\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\phi[f^{-1}[V] \cap U]}$ bei $\phi(x)$ an.**q.e.d.**

Definition 1.38. *Der Rang einer differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bei $x \in X$ ist der Rang von $T_x(f) : T_x X \to T_{f(x)} Y$.*

Eine glatte Abbildung f heißt Immersion, wenn $T_x(f)$ für alle $x \in X$ injektiv ist.

Eine glatte Abbildung f heißt Submersion, wenn $T_x(f)$ für alle $x \in X$ surjektiv ist.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass für eine lineare Abbildung $A : V \to W$ zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen folgendes gilt:

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim V \iff A \text{ ist injektiv }.$$

$$\mathrm{Rang}(A) = \dim W \iff A \text{ ist surjektiv }.$$

Deshalb sind die Immersionen die Abbildungen, deren Rang der Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ gleich $\dim T_x X$ ist, und die Submersionen die Abbildungen, deren Rang der Ableitungen $T_x(f)$ für alle $x \in X$ gleich $\dim_{f(x)} TY$ ist. Insbesondere sind Diffeomorphismen sowohl Immersionen als auch Submersionen. Aber glatte Abbildungen f, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, sind nicht immer Diffeomorphismen.

Beispiel 1.39. *Sei*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

Dann ist f offenbar unendlich oft differenzierbar. Für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist $f(x) \neq (1,0)$. Die Verkettung von f mit der Variante der stereographischen Projektion ist also gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Die Ableitung dieser Abbildung ist

$$y' = \frac{\cos(x)(1 - \cos(x)) - \sin^2(x)}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) - 1}{(1 - \cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x) - 1}.$$

Also ist diese Abbildung für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sowohl eine Immersion als auch eine Submersion. Für $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $f(x) \neq (-1, x)$. Dann ist die Verkettung von f mit der gespiegelten Variante der stereographischen Projektion gleich

$$x \mapsto y \text{ mit } y = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Für die Ableitung gilt

$$y' = \frac{\cos(x)(1 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{\cos(x) + 1}{(1 + \cos(x))^2} = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Also ist f eine Immersion und eine Submersion, aber kein Diffeomorphismus, weil f nicht injektiv ist. f ist zwar lokal ein Diffeomorphismus, aber nicht immer global.

Wegen dem Satz der inversen Funktion können wir für jede Immersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass V diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von U mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_{f(x)}Y - \dim T_xX$. Dadurch wird f mit einer Einbettung von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Immersion injektiv, aber nicht immer global.

Analog können wir auch mit dem Satz der impliziten Funktion für jede Submersion $f : X \to Y$ und jedes $x \in X$ Umgebungen U von x und V von $f(x)$ finden, so dass U diffeomorph ist zu dem kartesischen Produkt von V mit einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim T_xX - \dim T_{f(x)}Y$. Dabei wird f mit der natürlichen Projektion von U nach V identifiziert. Lokal ist also jede Submersion surjektiv, aber nicht immer global.

Wir nennen glatte Abbildungen, die sowohl Immersionen als auch Submersionen sind, lokale Diffeomorphismen. Dann sind alle bijektiven lokalen Diffeomorphismen auch globale Diffeomorphismen. Insbesondere sind verträgliche Karten Diffeomorphismen von offenen Teilmengen der Mannigfaltigkeit auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Wir können weitere Begriffe der Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. So heißt ein Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Funktion $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten kritischer Punkt, wenn $T_x(f) = 0$ gilt. Lokale Extremwerte von reellen Funktionen sind entweder lokale Minima oder lokale Maxima. Alle lokalen Extremwerte von differenzierbaren reellen Funktionen sind auch kritische Punkte.

Wir führen jetzt eine zweite Charakterisierung der Elemente des Tangentialraumes ein. Für $s \in \mathbb{R}$ sei $1_{T_s\mathbb{R}} \in T_s\mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse von $(-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + s$. Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X, $x \in X$ und $v \in T_xX$ definieren wir

$$D_v : C^1(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad \text{mit} \qquad T_x(f)(v) = D_v(f)1_{T_{f(x)}\mathbb{R}}.$$

Wenn $y : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ ein Repräsentat von $v \in T_xX$ ist, dann ist $v = T_0(y)(1_{T_0\mathbb{R}})$ und

$$T_x(f)(v) = T_x(f) \circ T_0(y)(1_{T_0\mathbb{R}}) = T_0(f \circ y)(1_{T_0\mathbb{R}}) = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(y(t))1_{T_{f(x)}\mathbb{R}}.$$

Also ist $D_v(f) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(y(t))$ und D_v $\mathbb{R}$–linear und erfüllt die Leibnizregel:

$$D_v(fg) = f(x)D_v(g) + D_v(f)g(x) \quad \text{für alle} \quad f, g \in C^1(X, \mathbb{R}).$$

Satz 1.40. *(von Hadamard und Bohnenblust) Sei $D : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto D(f)$ eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung die $D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x)$ für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und ein $x \in X$ erfüllt. Dann gibt es genau ein $v \in T_xX$ mit $D = D_v$.*

Beweis: Wegen der Leibnizregel definiert jedes $v \in T_xX$ eine solche Derivation D_v.

Sei jetzt umgekehrt D eine beliebige Derivation, die obige Eigenschaften hat. Aus $D(1) = D(1 \cdot 1) = 2D(1)$ folgt, $D(1) = 0$. Deshalb stimmen für alle $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$

die Werte $D(f)$ mit $D(f - f(x)1)$ überein. Die Funktion $f - f(x)1 \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ verschwindet bei x. Umgekehrt folgt $D(fg) = 0$ aus $f(x) = 0 = g(x)$. Also verschwindet D auf allen Produkten von glatten Funktionen, die bei x verschwinden.

Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine verträgliche Karte, mit $x \in U$, $\phi(x) = 0$ und $B(0, r) = \phi[U]$. Dann verschwinden $\phi_1, \ldots, \phi_m \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ bei $x = 0$. Die glatte Funktion

$$h : X \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x) = \begin{cases} f_{r/3,2r/3}(|\phi(x)|) & \text{für } x \in U \\ 0 & \text{für } x \notin U \end{cases}$$

(mit $f_{r/3,2r/3}$ aus dem letzten Abschnitt) ist 1 auf $\phi^{-1}[B(0, r/3)]$ und verschwindet außerhalb von $\phi^{-1}[B(0, 2r/3)]$. Dann ist $1-(1-h)^2 = 2h-h^2$ und $(1-h)^2$ eine glatte Zerlegung der Eins zu der Überdeckung $X = U \cup (X \setminus \phi^{-1}[\overline{B(0, r/3)}]$. Für $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt dann $D(f) = D((2h - h^2)f) + D((1 - h)^2 f) = D((2h - h^2)f)$. Weil das für alle hinreichend kleinen $r > 0$ gilt, stimmt D auf allen solchen Funktionen überein, die auf einer beliebig kleinen Umgebung von x übereinstimmen (man spricht dann auch von dem Funktionskeim in x). Für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ definiert

$$y : (-\epsilon, \epsilon) \to X, \quad t \to \phi^{-1}(t(D(h\phi_1), \ldots, D(h\phi_n)))$$

eine glatte Abbildung mit $y(0) = x$. Die entsprechende Äquivalenzklasse wollen wir $v \in T_x X$ nennen. Die Abbildung y is so definiert, dass $\phi \circ y(t) = t(D(h\phi_1), \ldots, D(h\phi_m))$ gilt. Insbesondere stimmen D und D_v auf den Funktionen $h\phi_1, \ldots, h\phi_m$ überein.

Zuletzt zerlegen wir $f - f(x)$ auf einer Umgebung von x in eine Summe von Produkten von $\phi_1, \ldots, \phi_n$ mit glatten Funktionen. Für jedes $g \in C^\infty(B(0, r), \mathbb{R})$ gilt

$$g(\varphi) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(t\varphi) dt = \int_0^1 \varphi \cdot \nabla g(t\varphi) dt = \varphi \cdot \int_0^1 \nabla g(t\varphi) dt \quad \text{für alle } \varphi \in B(0, r).$$

Deshalb ist $g(\varphi) - g(0) = \varphi_1 g_1 + \ldots + \varphi_n g_n$ für alle $\varphi \in B(0, r)$ mit $g_i \in C^\infty(B(0, r), \mathbb{R})$ und $g_i(0) = \frac{\partial g}{\partial \varphi_i}(0)$. Dann ist auch $h(f - f(x)) = h(\phi_1 f_1 + \ldots + \phi_n f_n)$ mit $f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Wegen der Derivationseigenschaft und wegen $h\phi(x) = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} D(f) &= D(h(f - f(x))) = f_1(x) D(h\phi_1) + \ldots + f_n(x) D(h\phi_n) \\ &= f_1(x) D_v(h\phi_1) + \ldots + f_n(x) D_v(h\phi_n) = D_v(h(f - f(x)) = D_v(f). \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Zum Abschluss fassen wir die Definition des Tangentialraumes nochmal zusammen. Für jeden Vektorraum V ist der Tangentialraum an jedem Punkt $v \in V$ auf natürliche Weise isomorph zu dem Vektorraum V. Insbesondere ist der Tangentialraum von jedem reellen Intervall in jedem Punkt des Intervalls isomorph zu $\mathbb{R}$. Weil differenzierbare Abbildungen sich hochheben lassen zu Abbildungen zwischen den Tangentialräumen, konnten wir den Tangentialraum dadurch unabhängig von den Karten einführen, indem wir die Tangentialvektoren als die Bilder von Tangentialvektoren von offenen Intervallen $(-\epsilon, \epsilon)$ unter differenzierbaren Abbildungen von den offenen Intervallen in die differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert haben. Jeder solche Tangentialvektor definiert durch die Richtungsableitung eine Derivation auf den glatten Funktionen. Umgekehrt ist jede Derivation auf den glatten Funktionen von dieser Form, so dass wir die Derivationen mit den Tangentialvektoren identifizieren können.

Im übernächsten Abschnitt werden wir auch $TX = \bigcup_{x \in X} T_x$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen, so dass für glatte Abbildungen f zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auch $T(f)$ eine glatte Abbildung ist.

1.6 Produkte von Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten

Nachdem wir die Objekte und die Abbildungen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt haben, werden wir jetzt zwei Möglichkeiten kennenlernen, wie wir aus differenzierbaren Mannigfaltigkeiten neue differenzierbare Mannigfaltigkeiten bilden können: nämlich einerseits das kartesische Produkt von zwei Mannigfaltigkeiten, und andererseits Untermannigfaltigkeiten von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Das kartesische Produkt erhält man ohne weitere Schwierigkeiten, indem wir erst die topologischen Räume, dann die Karten und schließlich die Atlanten des kartesischen Produktes aus den entsprechenden topologischen Räumen, Karten und Atlanten der beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten bilden. Dagegen ist die Einführung von Untermannigfaltigkeiten relativ kompliziert. Natürlich ist jede offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Aber Untermannigfaltigkeiten von niederer Dimension sind nicht so einfach zu beschreiben. Hier benutzen wir den Satz der inversen Funktion.

Wegen Heine-Borel ist das kartesische Produkt zweier abgscheschlossener Bälle in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ kompakt[2]. Dann ist das kartesiche Produkt $X \times Y$ der topologischen Räume zweier differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ein lokalkompakter Hausdorffraum, der wegen Lemma 1.30 Bedingung (ii) in Satz 1.29 erfüllt, und ein Lindelöfraum ist. Wenn $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ Karten sind von X bzw. Y, dann ist

$$\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \to (\phi(x), \psi(y))$$

eine Karte von $X \times Y$. Wenn diese Karten Atlanten von X bzw. Y durchlaufen, erhalten wir einen Atlas von $X \times Y$.

[2] Wegen dem Satz von Tychonoff (siehe Chapter 3 Theorem 5.7 und Chapter 5 Theorem 1.1 von J.M. Munkres: Topology) ist das kartesische Produkt kompakter topologischer Räume kompakt.

Definition 1.41. *Das kartesische Produkt von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y ist auf natürliche Weise wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $X \times Y$, so dass die beiden folgenden natürlichen Projektionen glatte Abbildungen sind:*

$$p_1 : X \times Y \to X, (x, y) \mapsto x \quad p_2 : X \times Y \to Y, (x, y) \mapsto y$$

Diese beiden Projektionen sind dann offenbar beide surjektive Submersionen. Umgekehrt ist für jedes $y \in Y$ die Abbildung $X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Analog ist für jedes $x \in X$ die Abbildung $Y \to X \times Y, \quad y \mapsto (x, y)$ eine injektive Immersion. Durch diese beiden Abbildungen können wir sowohl X als auch Y als abgeschlossenen topologischen Unterraum von $X \times Y$ auffassen. Wir wollen jetzt X bzw. Y als differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$ auffassen.

Definition 1.42. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine Immersion. Ist f ein Homöomorphismus auf den topologischen Unterraum $f[X]$ von Y, dann heißt f Einbettung und $f[X]$ Untermannigfaltigkeit von Y.*

Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X ist eine injektive Immersion $f : X \to Y$ immer eine Einbettung auf das Bild. Im allgemeinen ist eine injektive Immersion $f : X \to Y$ nicht mal dann eine Einbettung, wenn das Bild $f[X]$ in Y abgeschlossen ist.

Beispiel 1.43. *Das Bild der injektiven Immersion*

$$f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2, \quad t \to \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right)$$

ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$. Aber wegen $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = f(-1)$ ist f kein Homöomorphismus auf das Bild als topologischen Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

Um die topologischen Unterräume $X \subset Y$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y zu charakterisieren, die differenzierbare Untermannigfaltigkeiten sind, zeigen wir zunächst den sogenannten Rangsatz.

Satz 1.44 (Rangsatz)**.** *Sei $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $f : X \to Y$ eine l–mal stetig differenzierbare Abbildung zwischen den offenen Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^m$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist für jedes $x_0 \in X$ der Rang von f auf einer Umgebung von x_0 nicht kleiner als bei x_0.*

Ist der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant, dann gibt es auf offenen Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ l–mal stetig differenzierbare Karten ϕ und ψ mit $\phi(x_0) = 0 = \psi(f(x_0))$ und l–mal stetig differenzierbaren Umkehrabbildungen, so dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ mit der Einschränkung der linearen Abbildung $f'(x_0)$ auf $\phi[U]$ übereinstimmt.

Beweis: Sei r der Rang von f bei x_0. dann gibt es r linear unabhängige Vektoren $x_1 \ldots, x_r \in \mathbb{R}^m$, die durch $f'(x_0)$ auf linear unabhängige Vektoren von $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden. Dann gibt es r Komponenten von $\mathbb{R}^n$, so dass die Determinante der $r \times r$ Matrix, dieser Komponenten der Vektoren $f'(x_0)x_1, \ldots, f'(x_0)x_r$ nicht verschwindet. Die Determinante der Matrix dieser Komponenten der Vektoren $f'(x)x_1, \ldots, f'(x)x_r$ hängt stetig von x ab. Deshalb gibt es eine Umgebung, auf der diese Determinante nicht verschwindet. Dort ist der Rang von $f'(x)$ dann nicht kleiner als r.

Sei jetzt der Rang auf einer Umgebung von x_0 konstant gleich r. Wir wählen ein $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, dessen hintere $m - r$ Spalten eine Basis vom Kern von $f'(x_0)$ bilden, und durch die ersten r Spalten zu einer Basis von $\mathbb{R}^m$ ergänzt werden. $f'(x_0)$ bildet diese r Spalten dann auf eine Basis vom Bild von $f'(x_0)$ ab, die wir zu einer Basis vom $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Mit der inversen $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ der Matrix, deren Spalten diese Basis bilden, ist $C \circ f'(x_0) \circ B$ die Abbildung $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \to \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$, $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$. Indem wir $x \mapsto f(x)$ durch $x \mapsto C \circ (f(x_0 + Bx) - f(x_0))$ ersetzen wird $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0)$ zu $(x, \tilde{x}) \mapsto (x, 0)$. Die ersten r Koponenten von f fassen wir zu $\hat{f}$ und die letzten $n - r$ Komponenten zu $\tilde{f}$ zusammen. Wegen dem Satz der impliziten Funktion gibt es $B(0, R) \subset \mathbb{R}^r$ und $B(0, \tilde{R}) \subset \mathbb{R}^{m-r}$ und eine l–mal stetig differenzierbare Abbildung

$$g : B(0, R) \times B(0, \tilde{R}) \to W \subset \mathbb{R}^r, \text{ mit } \hat{f}(g(x, \tilde{x}), \tilde{x}) = x \text{ für } (x, \tilde{x}) \in B(0, R) \times B(0, \tilde{R}).$$

Weil $\hat{f}$ bei $(0, 0)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \hat{f}(x,\tilde{x})}{\partial x} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$ und $\frac{\partial \hat{f}(x,\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 0$ hat, hat g dort die gleichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial g(x,\tilde{x})}{\partial x} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^r}$ und $\frac{\partial g(x,\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = 0$. Dann erfüllt

$$\phi : B(0, R) \times B(0, \tilde{R}) \to W \times B(0, \tilde{R}), \quad (x, \tilde{x}) \mapsto (g(x, \tilde{x}), \tilde{x})$$

$\hat{f}(\phi(x, \tilde{x})) = x$ für alle $(x, \tilde{x}) \in B(0, R) \times B(0, \tilde{R})$ mit $\phi'((0, 0)) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$. Wegen dem Satz der inversen Funktion besitzt ϕ für hinreichend kleines R und $\tilde{R}$ eine l–mal stetig differenzierbare Umkehrabbildung. Für hinreichend kleine R, $\tilde{R}$ und W sind $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$ auf $W \times B(0, \tilde{R})$ linear unabhängig, und $\nabla f_{r+1}, \ldots, \nabla f_n$ wegen dem konstanten Rang Linearkombinationen von $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_r$. Für $x \in B(0, R)$ ist $\hat{f}$ und damit auch $\tilde{f}$ auf $\phi[\{x\} \times B(0, \tilde{R})]$ konstant. Auf geeigneten offenen Umgebungen von $0 \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ sind die folgenden l–mal stetig differenzierbaren Abbildungen zueinander invers:

$$\psi : (y, \tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} - \tilde{f}(\phi(y, 0))) \qquad \psi^{-1} : (y, \tilde{y}) \mapsto (y, \tilde{y} + \tilde{f}(\phi(y, 0))).$$

Dann gilt $\psi(f(\phi(x, \tilde{x}))) = (x, 0)$ für alle $x \in B(0, R)$ und $\tilde{x} = 0$ und wegen der Konstanz von $\tilde{f}$ auf $\phi[\{x\} \times B(0, \tilde{R})]$ auch für alle $\tilde{x} \in B(0, \tilde{R})$. **q.e.d.**

Satz 1.45. *Sei $X \subset Y$ ein topologischer Unterraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann besitzt X genau dann die Struktur einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit von Y, wenn es für jedes $x \in X$ eine mit dem Atlas von Y verträgliche*

Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von Y bei $x \in U$ gibt, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet, und deren Einschränkung $\phi|_{U\cap X}$ auf die offene Umgebung $U \cap X$ von x in X ein Homöomorphismus auf die Schnittmenge von dem Bild $\phi[U]$ mit einem linearen Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Bedingung hinreichend dafür ist, dass X eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist. Die Einschränkung einer solchen Karte ϕ um $x \in X$ auf $U \cap X$ ist eine Karte von X um den Punkt x, weil die Schnittmenge einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit einem Unterraum von $\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge des linearen Unterraumes ist. Zwei solche Karten, deren Definitionsbereiche beide den Punkt x enthalten, bilden beide eine offene Umgebung von x in X jeweils auf eine offene Teilmenge eines linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ab. Die entsprechenden Übergangsfunktionen sind Homöomorphismen von einer offenen Teilmenge des einen Unterraumes auf eine offene Teilmenge des anderen Unterraumes. Sie sind sogar Diffeomorphismen, weil die Karten von Y miteinander verträglich sind. Dann sind auch die Karten von X miteinander verträglich. Deshalb besitzt X einen Atlas.

Ein topologischer Raum (Z, τ) erfüllt das sogenannnte zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn τ eine abzählbare Basis β enthält, so dass jedes $O \in \tau$ die Vereinigung aller $\{U \in \beta \mid U \subset O\}$ ist. Die Schnittmengen der Elemente von β mit einem Unterraum bilden eine abzählbare Basis des Unterraums und im $\mathbb{R}^m$ ist $\beta = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^m, r \in \mathbb{Q}^+\}$ eine abzählbare Basis. Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ eines solchen Z ist $\beta' = \{V \in \beta \mid V \subset U_V$ für ein $U_V \in \mathcal{U}\}$ höchstens abzählbar und $(U_V)_{V\in\beta'}$ eine Teilüberdeckung, weil jedes $x \in Z$ in einem $U \in \mathcal{U}$, also einem $V \in \beta'$ liegt. Wegen Lemma 1.30 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine abzählbare Vereinigung von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$, und damit ein solcher Raum. Also ist $X \subset Y$ als ein solcher Raum ein Hausdorff– und Lindelöfraum und eine Untermannigfaltigkeit von Y.

Wenn umgekehrt $f : Z \to Y$ eine Immersion und ein Homöomorphismus auf einen topologischen Unterraum $X = f[Z] \subset Y$ ist, dann hat f auf jeder Zusammenhangskomponente von Z konstanten Rang. Wegen Satz 1.44 liegt dann jedes $x \in X$ im Definitionsbereich U einer mit dem Atlas von Y verträglichen Karte ϕ von Y der Dimension n mit $\phi(x) = 0$, die die Schnittmenge $U \cap X$ auf $\phi[U] \cap T(\phi \circ f)[T_{f^{-1}(x)}Z] \subset T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ abbildet. Damit haben wir gezeigt, dass es für jede Untermannigfaltigkeit X von Y einen Atlas gibt, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. **q.e.d.**

Zum Abschluss wollen wir noch den Satz der impliziten Funktion umformulieren.

Korollar 1.46. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit lokal konstantem Rang. Dann ist für jedes $y \in f[X]$ das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von X. Ihr Tangentialraum ist in dem Punkt $x \in f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$. Dort hat sie die Dimension* $\dim T_xX - \operatorname{Rang}(T_x(f))$.

Beweis: Wegen Satz 1.44 liegt jedes $x \in X$ im Definitionsbereich einer mit dem Atlas von X verträglichen Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X mit $\phi(x) = 0$, die $U \cap f^{-1}[\{f(x)\}]$ in einen linearen Unterrraum $\phi[U] \cap T_x(\phi)[\mathrm{Kern}(T_x(f))] \subset \mathbb{R}^n$ abbildet. Dieser Kern hat die Dimension $\dim T_xX - \mathrm{Rang}(T_x(f))$. Die Aussage folgt aus Satz 1.45. **q.e.d.**

Insbesondere sind die Niveaumengen von Submersionen Untermannigfaltigkeiten.

Korollar 1.47. *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ zwei glatte Abbildungen, von denen mindestens eine eine Submersion ist. Dann ist das Faserprodukt*

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

eine Untermannigfaltigkeiten von $X \times Y$ der Dimension

$$\dim T_{(x,y)}X \times_Z Y = \dim T_xX + \dim T_yY - \dim T_{f(x)}Z = \dim T_xX + \dim T_yY - \dim T_{g(y)}Z.$$

Beweis: Seien $(x, y) \in X \times_Z Y$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von Z auf einer offenen Umgebung U von $z = f(x) = g(y)$. Dann ist die Abbildung

$$\phi \circ f \circ p_1 - \phi \circ g \circ p_2 : f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \to \mathbb{R}^n, \quad (u, v) \mapsto \phi(f(u)) - \phi(g(v))$$

eine Submersion, weil entweder $\phi \circ f$ oder $\phi \circ g$ eine Submersion ist. Das Urbild der $0 \in \mathbb{R}^n$ dieser Abbildung ist wegen Korollar 1.46 eine Untermannigfaltigkeit von $f^{-1}[U] \times g^{-1}[U]$. Weil ϕ injektiv ist, ist $\phi(f(u)) = \phi(g(v))$ äquivalent zu $f(u) = g(v)$. Also ist diese Untermannigfaltigkeit gleich $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U]$. Damit sind auf diesem Teilraum $f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] \subset f^{-1}[U] \times g^{-1}[U] \subset X \times Y$ die Bedingungen im Satz 1.45 erfüllt. Weil dies für alle $(x, y) \in X \times_Z Y$ gilt, sind diese Bedingungen auf ganz $X \times_Z Y$ erfüllt. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Beispiel 1.48. (i) *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist die Diagonale von $X \times X$ das Faserprodukt $X \times_X X$ bezüglich zwei Kopien der Abbildungen $\mathbb{1}_X : X \to X$. Diese Abbildungen sind Diffeomorphismen, so dass die Diagonale $X \times_X X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times X$ ist. Die Abbildung $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ ist offenbar ein Diffeomorphismus von X auf $X \times_X X$.*

(ii) *Seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung. Dann ist der Graph von f das Faserprodukt $X \times_Y Y$ der beiden Abbildungen $f : X \to Y$ und $\mathbb{1}_Y : Y \to Y$. Weil die zweite ein Diffeomorphismus ist, ist $X \times_Y Y$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $X \times Y$. Die Abbildung $\mathbb{1}_X \times f$ induziert offenbar einen Diffeomorphismus von $X \times_X X$ auf $X \times_Y Y$.*

1.7 Tangentialbündel

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Vereinigung aller Tangentialräume $TX = \bigcup_{x\in X} T_xX$ wieder zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit der Vektorraumstruktur zu machen. Dazu führen wir zunächst den Begriff des Faserbündels ein.

Definition 1.49. *Ein differenzierbares Faserbündel ist ein Tripel (X, B, π), wobei X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind und π eine surjektive glatte Abbildung von X nach B, die die folgende Bedingung (der sogenannten lokalen Trivialität) erfüllt.*

Lokale Trivialität: *Es gibt eine Überdeckung von B durch offene Teilmengen $U \subset B$ mit Diffeomorphismen $\phi : F\times U \to \pi^{-1}[U]$ für differenzierbare Mannigfaltigkeiten F, so dass $\pi \circ \phi$ mit der Projektion $p_2 : F \times U \to U$ übereinstimmt.*

Weil die natürliche Projektion $p_2 : F \times U \to U$ immer eine Submersion ist, ist dann auch π eine Submersion. Man nennt X den Faserraum, B seine Basis und π die Projektion des Faserbündels. Wegen der lokalen Trivialität sind alle Urbilder $\pi^{-1}[\{b\}]$ für alle b in einer Umgebung eines $b_0 \in B$ zueinander diffeomorph. Diese Urbilder werden Fasern genannt. Sind alle Fasern zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit F diffeomorph, so wird das Faserbündel auch Faserbündel vom Fasertyp F genannt. Aus der lokalen Trivialität folgt, dass die Menge aller $b \in B$ mit Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$, die zu einer Faser $\pi^{-1}[\{b_0\}]$ diffeomorph sind, offen sind. Aus der lokalen Trivialität folgt auch, dass sie auch den Grenzwert von konvergenten Folgen in ihnen enthalten. Deshalb sind diese Mengen offen und abgeschlossen. Also sind die Einschränkungen eines Faserbündels auf das entsprechende Faserbündel $(\pi^{-1}[C], C, \pi|_{\pi^{-1}[C]})$ über einer zusammenhängenden Komponente C von B Faserbündel von einem bestimmten Fasertyp F.

Definition 1.50. *Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraumbündel ist ein Faserbündel (E, B, π), so dass jede Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist, und in der lokalen Trivialität F ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist, und ϕ für jedes $b \in B$ Vektorraumisomorphismen von $F \times \{b\}$ nach $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind.*

Beispiel 1.51. *Sei V ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und π die natürliche Projektion von $V \times X$ auf X. Dann ist $(V \times X, X, \pi)$ ein Vektorraumbündel über X. Dieses Vektorraumbündel wird trivial genannt.*

Die lokale Trivialität besagt genau, dass jedes Vektorraumbündel lokal ein triviales Vektorraumbündel ist. Wir wollen jetzt umgekehrt ein Vektorraumbündel aus lokalen trivialen Vektorraumbündeln konstruieren. Sei also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, F ein normierter endlichdimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum, und $\mathcal{L}(F)$ der normierte Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von F nach F. Er enthält als offene Teilmenge die Gruppe $GL(F)$ der invertierbaren linearen Abbildungen. Sei $\mathcal{U}$ eine offene

Überdeckung von X. Wir werden die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Für nicht schnittfremde Paare $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sei $\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ eine glatte Funktion. Sie definiert folgende glatte Abbildung:

$$\phi_{V,U} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), \quad (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}(x)f, x).$$

Weil $\phi_{V,U}(x)$ für jedes $x \in U \cap V$ invertierbar ist, ist die Umkehrabbildung gleich

$$\phi_{V,U}^{-1} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V), \quad (f, x) \mapsto (\phi_{V,U}^{-1}(x)f, x).$$

Also sind diese Abbildungen Diffeomorphismen. Weil $\phi_{V,U}(x)$ und $\phi_{V,U}^{-1}(x)$ für alle $x \in U \cap V$ linear sind, sind diese Diffeomorphismen sogar Isomorphismen von Vektorraumbündeln. Damit diese Isomorphismen die trivialen Vektorraumbündel $(F \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ auf eindeutige Weise zu einem Vektorraumbündel über X verklebt, müssen für alle $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ die drei trivialen Vektorraumbündel $F \times U, F \times V$ und $F \times W$ auf $U \cap V \cap W$ eindeutig miteinander identifiziert werden. Deshalb fordern wir:

Kozykelbedingung: Für alle nicht schnittfremden Tripel $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$ gilt

$$\phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \phi_{W,U}(x) \quad \text{für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Wenn wir $U = V = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,U}(x) = \phi_{U,U}^{-1}(x) \circ \phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_F \text{ für alle } x \in U$$

Wenn wir $U = W$ setzen erhalten wir

$$\phi_{U,V}(x)\phi_{V,U}(x) = \mathbb{1}_F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x) \qquad \text{für alle } x \in U \cap V.$$

Auf dem Raum $\bigcup_{U \in \mathcal{U}}(F \times U)$ führen wir folgende Relation ein:

$$(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x \text{ in } X \text{ und } \phi_{V,U}(x)e = f.$$

Wir zeigen jetzt, dass diese Relation wegen der Kozykelbedingung eine Äquivalenzrelation ist. Wegen $\phi_{U,U}(x) = \mathbb{1}_U$ ist die Relation reflexiv. Wegen $\phi_{U,V}(x) = \phi_{V,U}^{-1}(x)$ ist $\phi_{V,U}(x)e = f$ äquivalent zu $\phi_{U,V}(x)f = e$. Deshalb ist die Relation $\sim$ symmetrisch. Weil für alle $x \in U \cap V \cap W$ gilt $\phi_{W,U}(x) = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)$, folgt aus $(e, x) \in F \times U \sim (f, y) \in F \times V$ und $(f, y) \in F \times v \sim (g, z) \in F \times W$ auch $z = y = x \in U \cap V \cap W$ und $\phi_{W,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)\phi_{V,U}(x)e = \phi_{W,V}(x)f = g$. Also ist die Relation $\sim$ auch transitiv.

Sei E die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Weil nur Paare über demselben Basispunkt miteinander identifiziert werden, induzieren die Projektionen $p_2 : F \times U \to U$ der trivialen Vektorraumbündel $F \times U$ eine Abbildung $\pi : E \to X$.

Alle Fasern $(\pi^{-1}[\{x\}])_{x\in X}$ dieser Abbildung sind Vektorräume. Weil für alle $x \in U \cap V$ die Werte $\phi_{V,U}(x)$ der Übergangsfunktionen lineare Abbildungen sind, sind diese Fasern als Vektorräume isomorph zu F. Wir versehen E mit der Topologie, so dass $O \subset E$ genau dann offen ist, wenn für alle $U \in \mathcal{U}$, das Urbild von O unter der natürlichen Abbildung $F \times U \to E$ offen ist. Für jede offene Teilmenge $O \subset X$ und $U \in \mathcal{U}$ ist $F \times (O \cap U)$ offen in $F \times U$. Also ist $\pi : E \to X$ stetig. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und eine offene Teilmenge $O \subset F \times U$ ist die Schnittmenge mit den Elementen von $F \times U$, deren Äquivalenzklassen in $\pi^{-1}[V]$ liegen, die offene Teilmenge $O \cap F \times (V \cap U) \subset F \times U$, die durch den Diffeomorphismus $\phi_{V,U}$ auf eine offene Teilmenge von $F \times V$ abgebildet wird. Also bildet die stetige und bijektive Abbildung $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ auf die Äquivalenzklassen offene Mengen auf offene Mengen ab, und ist ein Homöomorphismus. Für $x, y \in E$ mit $\pi(x) \neq \pi(y)$ liegen $\pi(x)$ und $\pi(y)$ in disjunkten offenen Umgebungen in X. Ihre Urbilder unter π sind disjunkte offene Umgebungen von x und y. Für $x \neq y \in E$ mit $\pi(x) = \pi(y)$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\pi(x) = \pi(y) \in U$. Die Urbilder von x und y unter $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ sind verschieden und besitzen disjunkte Umgebungen in $F \times U$. Ihre Bilder unter $F \times U \to \pi^{-1}[U]$ sind disjunkte Umgebungen von x und y. Also ist E ein Hausdorffraum. Weil X ein Lindelöfraum ist, besitzt $\mathcal{U}$ eine abzählbare Teilüberdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Für jedes $V \in \mathcal{V}$ ist $F \times V$ ein Lindelöfraum, und jede offene Überdeckung von E besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung der Äquivalenzklassen von den Elementen in $F \times V$. Die abzählbare Vereinigung aller dieser Teilüberdeckungen ist eine abzählbare Teilüberdeckung von E, und E ist ein Lindelöfraum. Wegen Lemma 1.30 besitzt X einen Atlas, dessen Definitionsbereiche U jeweils in einem Element von $\mathcal{U}$ enthalten sind. Die entsprechenden Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ induzieren mit einem Vektorraumisomorphismus $F \simeq \mathbb{R}^n$ Karten $\pi^{-1}[U] \simeq F \times U \to \mathbb{R}^n \times \phi[U]$ von E. Weil $(f, x) \mapsto (\phi_{V,U}(x)f, x)$ für $U, V \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen von $F \times (U \cap V)$ auf sich selber sind, bilden diese Karten einen Atlas. Damit haben wir gezeigt:

Satz 1.52. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ und F ein endlichdimensionaler normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Dann definieren glatte Funktionen $\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F)$ für nicht schnittfremde Paare $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, die die Kozykelbedingung erfüllen, ein Vektorraumbündel (E, X, π) vom Fasertyp F.* **q.e.d.**

Satz 1.53. **(i)** *Sei B eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann sind alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])$ eines Vektorraumbündels (E, B, π) über B als topologische Vektorräume isomorph, d.h. (E, B, π) ist von einem bestimmten Fasertyp.*

(ii) *Sei F ein normierter Vektorraum und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann gibt es eine Überdeckung $\mathcal{U}$ von B und Kozykel ϕ, d.h. für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ glatte Abbildungen $\phi_{V.U} : U \cap V \to GL(F)$, die die Kozykelbedingung erfüllen, so dass das entsprechende Vektorraumbündel isomorph ist zu (E, B, π).*

Beweis: (i) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes $b \in B$ eine offene Umgebung U von b, auf der alle Fasern $(\pi^{-1}[\{b'\}])_{b' \in U}$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu $\pi^{-1}[\{b\}]$. Also sind die Teilmengen von B, auf denen die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind, offen. Wenn $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einer solchen Teilmenge ist, dann gibt es eine Umgebung von dem Grenzwert, auf der die Fasern als topologische Vektorräume isomorph sind. Deshalb sind diese Teilmengen auch abgeschlossen. Wenn B zusammenhängend ist, dann ist für alle $b \in B$ die Teilmenge, auf denen alle Fasern als topologische Vektorräume isomorph zu $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind, gleich B.
(ii) Wegen der lokalen Trivialität gibt es für jedes Vektorraumbündel (E, B, π) vom Fasertyp F eine Überdeckung $\mathcal{U}$, und für alle $U \in \mathcal{U}$ Diffeomorphismen $\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U]$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] & \hookrightarrow & E \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B \end{array}.$$

Dabei ist ϕ_U über $b \in U$ faserweise ein Isomorphismus der normierten Vektorräume F und $\pi^{-1}[\{b\}]$ sind. Für alle $(U, V) \in \mathcal{U}^2$ definieren die Einschränkungen der Diffeomorphismen ϕ_U und ϕ_V auf $F \times (U \cap V)$ folgenden Diffeomorphismus

$$\phi_V^{-1}\big|_{\pi^{-1}[U\cap V]} \circ \phi_U\big|_{F\times(U\cap V)} : F \times (U \cap V) \to F \times (U \cap V).$$

Dieser Diffeomorphismus ist faserweise linear und definiert eine glatte Abbildung

$$\phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F) \text{ mit } (\phi_{V,U}(x)f, x) = \phi_V^{-1}(\phi_U(f, x)) \text{ für alle } (f, x) \in F \times (U \cap V).$$

Weil für alle $U, V, W \in \mathcal{U}$ $\quad \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U\cap V\cap W]} \circ \phi_U|_{F\times(U\cap V\cap W)} =$

$$= \phi_W^{-1}|_{\pi^{-1}[U\cap V\cap W]} \circ \phi_V|_{F\times(U\cap V\cap W)} \circ \phi_V^{-1}|_{\pi^{-1}[U\cap V\cap W]} \circ \phi_U|_{F\times(U\cap V\cap W)}$$

gilt, erfüllen diese Abbildungen die Kozykelbedingung. Dieser Kozykel $(\phi_{V,U})_{(U,V)\in\mathcal{U}^2}$ ist so definiert, dass die Trivialisierungen $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ äquivalente Elemente von $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} F \times U$ auf gleiche Elemente von E abbilden: Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt nämlich

$$\phi_U|_{F\times\{x\}} = \phi_V|_{F\times\{x\}} \circ (\phi_{V,U}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}}).$$

Deshalb induzieren die Abbildungen $(\phi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ eine bijektive Abbildung von dem durch den Kozykel definierten Vektorraumbündel nach E, die faserweise ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. Weil ϕ_U lokalen Trivialisierungen von E sind, ist die induzierte Abbildung ein Diffeomorphismus. **q.e.d.**

Satz 1.54. **(i)** *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist $TX = \bigcup_{x \in X} T_x X$ ein reelles Vektorraumbündel über X. Es heißt Tangentialbündel von X.*

(ii) *Sei $f : X \to Y$ eine r mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y. Dann definiert $T(f) : TX \to TY$ eine $(r-1)$ mal (stetig) differenzierbare Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit TX auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit TY, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T(f)} & TY \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(iii) *Seien X, Y und Z differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.*

(iv) *Die Tangentiale Abbildung $T(\mathbb{1}_X)$ der identischen Abbildung $\mathbb{1}_X$ von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist die identische Abbildung von TX.*

Beweis: Auf allen zusammenhängenden Komponenten sind die Dimensionen der Tangentialräume gleich einer natürlichen Zahl. Wegen Korollar 1.14 ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit eine höchstens abzählbare Vereinigung von offenen zusammenhängenden Komponenten. Deshalb können wir uns im Folgenden auf zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten X der Dimension n beschränken.

Die Tangentialräume vom $\mathbb{R}^n$ bilden ein triviales Vektorraumbündel:

$$T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (v, w) \mapsto w.$$

Dies folgt aus der Identifikation des Tangentialraumes $T_w\mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}^n$ im Punkt $w \in \mathbb{R}$ mit dem Raum aller infinitesimalen Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$, die wir schon zur Einführung der Vektorraumstruktur auf $T_x X$ benutzt haben. Sei $(\phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ ein Atlas von X mit den Definitionsbereichen $(U \in \mathcal{U})$. Diese Karten $(\phi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ induzieren bijektive Abbildungen

$$T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n,$$

die faserweise, also für alle $x \in U$ Vektorraumisomorphismen

$$T_x(\phi_U) : T_x U \to T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

induzieren. Indem wir die Tangentialbündel von $\phi_U[U]$ mit dem trivialen Bündel

$$T\phi_U[U] = \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \subset T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

identifizieren, und dann die Kartenwechsel

$$\phi_V \phi_U^{-1} : \phi_U[U \cap V] \to \phi_V[U \cap V]$$

benutzen, können wir diese trivialen Vektorraumbündel zu einem Vektorraumbündel über X verkleben. Die entsprechenden Abbildungen

$$U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n)$$

sind dann gegeben durch die Ableitungen der Übergangsfunktionen

$$(\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^n).$$

Für nicht schnittfremde Definitionsbereiche U und V zweier Karten ϕ_U und ϕ_V nimmt $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'$ Werte in $GL(\mathbb{R}^n)$ an. Für $U, V, W \in \mathcal{U}$ gilt

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})(y) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1}) \circ (\phi_V \circ \phi_U^{-1})(y) \text{ für alle } y \in \phi_U[U \cap V \cap W].$$

Daraus folgt mit der Kettenregel

$$(\phi_W \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) = (\phi_W \circ \phi_V^{-1})'(\phi_V(x)) \cdot (\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \text{ für alle } x \in U \cap V \cap W.$$

Also ist die Kozykelbedingung erfüllt und alle trivialen Vektorraumbündel $(\mathbb{R}^n \times U)_{U \in \mathcal{U}}$ definieren durch diese Kozykel ein Vektorraumbündel über X. Für jede Karte

$$\phi_U : U \to \phi_U[U] \subset \mathbb{R}^n$$

erhalten wir bijektive Abbildungen

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) : TU \to T\phi_U[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi_U[U] \to \mathbb{R}^n \times U.$$

Dadurch erhalten wir eine bijektive Abbildung von TX in das durch die Kozykel definierte Vektorraumbündel über X. Diese Abbildungen sind gerade so definiert, dass sie mit den Äquivalenzrelationen, aus deren Äquivalenzklassen das verklebte Vektorraumbündel besteht, verträglich ist: Auf $T(U \cap V)$ gilt nämlich

$$((\phi_V \circ \phi_U^{-1})' \circ \phi_U \times \mathbb{1}_{U \cap V}) \circ (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_U^{-1}) \circ T(\phi_U) = (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \phi_V^{-1}) \circ T(\phi_V)$$

weil für alle $x \in U \cap V$

$$T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ T_x(\phi_U) = T_x(\phi_V)$$

gilt, und $T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})$ durch die Identifikation von

$$T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

mit der Abbildung $(\phi_V \circ \phi_U^{-1})'(\phi_U(x)) \in GL(\mathbb{R}^n)$ identifiziert wird. Damit ist (i) gezeigt.

Aufgrund der Konstruktion des Tangentialbündels in (i) genügt es (ii) bezüglich zweier Karten nachzuprüfen. Sei also ϕ eine Karte von X um $x \in X$ und ψ eine Karte von Y in $f(x)$. Dann ist die Tangentialabbildung $T_x(f)$ als Abbildung von

$$T_{\phi(x)}\mathbb{R}^n \text{ nach } T_{\psi(f(x))}\mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch} \quad (\psi \circ f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)).$$

Hierbei ist n die Dimension von ϕ und m die Dimension von ψ. Weil also $T(f)$ durch die Ableitung von f bestimmt ist, ist $T(f)$ einmal weniger als f differenzierbar.

(iii) folgt aus Satz 1.36 (iii).

(iv) folgt daraus, dass die Ableitung von $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ an jeder Stelle gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. **q.e.d.**

1.8 Operationen auf Vektorraumbündeln

Definition 1.55. *Seien (E, B, π) und (E', B', π') zwei Vektorraumbündel über $\mathbb{K}$. Dann ist ein Morphismus zwischen diesen beiden Vektorraumbündeln definiert als zwei glatte Abbildungen $f : B \to B'$ und $g : E \to E'$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

und die Abbildung g faserweise linear ist, d.h. für alle $b \in B$ ist die Einschränkungen von g auf $\pi^{-1}[\{b\}]$ eine lineare Abbildung nach $\pi'^{-1}[\{f(b)\}]$. Sind f und g Diffeomorphismen, so heißt der Morphismus auch Isomorphismus der Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B', π'). Dann bilden die Umkehrabbildungen auch einen Morphismus, weil die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung linear ist.

Beispiel 1.56. **(i)** *Jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X induziert einen Isomorphismus $T(\phi) : TU \to T\phi[U]$ der Tangentialbündel.*

(ii) *Jede glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten induziert mit $T(f) : TX \to TY$ einen Morphismus der Tangentialbündel.*

(iii) *In Satz 1.53 (ii) haben wir gezeigt, dass jedes Vektorraumbündel von einem Fasertyp isomorph ist zu dem durch ein Kozykel induzierten Vektrorraumbündel.*

Definition 1.57. *Sei (X, B, π) ein differenzierbares Faserbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Sei $U \subset B$ eine offene Teilmenge von B. Dann heißt eine p mal (stetig) differenzierbare Abbildung $f : U \to X$, so dass die Verkettung von f mit π gleich der identischen Abbildung von U ist, ein p mal (stetig) differenzierbarer Schnitt von dem Faserbündel (X, B, π) über U. Wenn $U = B$ wird f globaler Schnitt genannt.*

Nicht jedes Faserbündel besitzt auch globale Schnitte, aber wegen der lokalen Trivialität besitzt jedes Faserbündel lokale Schnitte. Jedes Vektorraumbündel (E, B, π) besitzt immer den globalen Nullschnitt, der jedem $b \in B$ die eindeutige Null aus der Faser $\pi^{-1}[\{b\}]$ zuordnet. Die Menge aller dieser Nullen bildet wegen der lokalen Trivialität eine Untermannigfaltigkeit von E, die offenbar diffeomorph ist zu B.

Lemma 1.58. *Sei F ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension n und (E, B, π) ein Vektorraumbündel vom Fasertyp F. Dann ist E genau dann als Vektorraumbündel isomorph zu dem trivialen Bündel $(F \times B, B, \pi)$, wenn E n globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ besitzt, deren Werte in allen Fasern $(\pi^{-1}[\{b\}])_{b \in B}$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Wenn $\phi : F \times B \to E$ ein Diffeomorphismus ist, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{\phi} & E \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\mathbb{1}_B} & B \end{array}$$

kommutiert, und ϕ faserweise ein Vektorraumisomorphismus ist, dann definiert jedes $e \in F$ folgenden globalen Schnitt von E:

$$f : B \to \{e\} \times B \xrightarrow{\phi} E, \quad b \mapsto f(b) = \phi(e, b).$$

Insbesondere induziert jede Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von F durch ϕ globale glatte holomorphe Schnitte $f_1, \ldots, f_n$, die faserweise alle linear unabhängig sind.

Wir zeigen jetzt umgekehrt, dass globale glatte Schnitte $f_1, \ldots, f_n$ von E, die faserweise linear unabhängig sind, einen Isomorphismus von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B \simeq F \times B$ mit E induzieren. Weil die Werte von den Schnitten $f_1, \ldots, f_n$ in allen Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ mit $b \in B$ eine Basis der Faser bilden, ist

$$f : \mathbb{K}^n \times B \to E, \quad (\lambda, b) \mapsto f(\lambda, b) = \lambda_1 f_1(b) + \ldots + \lambda_n f_n(b),$$

eine bijektive, faserweise lineare Abbildung, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{K}^n \times B & \xrightarrow{f} & E & \hookleftarrow & \pi^{-1}[U] & \xleftarrow{\phi_U} & \mathbb{K}^n \times U \\ p_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & p_2 \downarrow \\ B & \xrightarrow{\mathbb{1}_B} & B & \hookleftarrow & U & \xleftarrow{\mathbb{1}_U} & U \end{array}$$

Im Bild einer Trivialisierung mit der Faser $F \simeq \mathbb{K}^n$ auf der rechten Seite wird $\phi_U^{-1} \circ f$ zu einer glatten Abbildung von U in die invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Mit den inversen Matrizen ist dann $(\phi_U^{-1} \circ f)^{-1}$ glatt und damit f ein Diffeomorphismus und damit auch ein Isomorphismus zwischen dem trivialen Vektorraumbündel $\mathbb{K}^n \times B$ und E. **q.e.d.**

Mithilfe der linearen Algebra und der Analysis können wir aus zwei (endlichdimensionalen) normierten Vektorräumen V und W die normierten Vektorräume des kartesischen Produktes $V \times W$ und der linearen stetigen Abbildungen von V nach $W : \mathcal{L}(V, W)$ bilden. Wir werden jetzt diese Operationen auf alle Fasern $\pi^{-1}[\{b\}]$ und $\pi'^{-1}[\{b\}]$ zweier Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π') über der gleichen Basis B anwenden und dadurch zwei neue Vektorraumbündel

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi'')$$

einführen. Wir errinnern daran, dass die direkte Summe $\oplus$ von Vektorräumen mit dem kartesischen Produkt übereinstimmt.

Satz 1.59. *Seien (E, B, π) und $(E', B; \pi')$ zwei Vektorraumbündel über der differenzierbaren Mannigfaltigkeit B. Dann gibt es zwei Vektorraumbündel*

$$(E \oplus E', B, \pi \oplus \pi') \quad \textit{und} \quad (\mathrm{Hom}(E, E'), B, \pi''),$$

deren Fasern

$$(\pi \oplus \pi')^{-1}[\{x\}] \quad \textit{und} \quad \pi''^{-1}[\{x\}]$$

für alle $x \in B$ als topologische Vektorräume isomorph sind zu

$$E_x \times E'_x \quad \textit{bzw.} \quad \mathcal{L}(E_x, E'_x) \quad \textit{mit} \quad E_x = \pi^{-1}[\{x\}] \quad \textit{und} \quad E'_x = \pi'^{-1}[\{x\}].$$

Beweis: Es genügt die Aussage auf jeder zusammenhängenden Komponente von B zu zeigen. Wegen Satz 1.53 genügt es dann die Aussage für Vektorraumbündel zu zeigen, die durch Kozykel induziert werden. Seien F und F' zwei normierte Vektorräume. Dann sind die beiden folgenden Abbildungen analytische Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{array}{rccr} \times : & GL(F) \times GL(F') \to GL(F \times F'), & (A, B) \mapsto A \times B \text{ mit} \\ A \times B : & F \times F' \to F \times F', & (f, f') \mapsto (Af, Bf'). \\ \Pi : & GL(F) \times GL(F') \to GL(\mathcal{L}(F, F')), & (A, B) \mapsto \Pi(A, B) \text{ mit} \\ \Pi(A, B) : & \mathcal{L}(F, F') \to \mathcal{L}(F, F'), & C \mapsto B \circ C \circ A^{-1} \end{array}$$

Dabei wird Af durch $\Pi(A, B)(C)$ auf Bf' abgebildet, wenn f durch C auf f' abgebildet wird. Seien jetzt (E, B, π) und (E', B, π) zwei Vektorraumbündel vom Fasertyp F bzw. F' mit normierten Vektorräumen F und F'. Die Schnittmengen zweier offener Überdeckungen von B auf denen jeweils die Urbilder von π bzw. π' triviale Bündle sind bilden eine Überdeckung $\mathcal{U}$ durch offene Mengen U, auf denen die Vektorraumbündel $\pi^{-1}[U]$ und $\pi'^{-1}[U]$ isomorph zu $F \times U$ bzw. $F' \times U$ sind. Wegen Satz 1.53 werden dann die beiden Vektorraumbündel (E, B, π) und (E', B, π) induziert durch Kozykel

$$\begin{array}{ll} \phi_{V,U} : U \cap V \to GL(F) & \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2 \\ \psi_{V,U} : U \cap V \to GL(F') & \text{für alle } (U, V) \in \mathcal{U}^2. \end{array}$$

Weil diese beiden Kozykel die Kozykelbedingung erfüllen, erfüllen auch die Kozykel

$$\begin{aligned}
\phi_{V,U} \times \psi_{V,U} &: U \cap V \to GL(F \times F') && \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2 \\
\Pi(\phi_{V,U}, \psi_{V,U}) &: U \cap V \to GL(\mathcal{L}(F,F')) && \text{für alle } (U,V) \in \mathcal{U}^2
\end{aligned}$$

die Kozykelbedingung und induzieren zwei Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E,E')$ vom Fasertyp $F \times F'$ bzw. $\mathcal{L}(F,F')$ auf B. Wir zeigen jetzt, dass die Fasern dieser Vektorraumbündel $E \oplus E'$ bzw. $\mathrm{Hom}(E,E')$ über allen Punkten $x \in B$ isomorph sind zu $E_x \times E'_x$ bzw. $\mathcal{L}(E_x, E'_x)$. Seien also für alle $U \in \mathcal{U}$ die lokalen Trivialisierungen von E und E' gegeben durch Isomorphismen von Vektorraumbündeln

$$\phi_U : F \times U \to \pi^{-1}[U] \text{ und } \psi_U : F' \times U \to \pi'^{-1}[U]$$

so dass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc}
F \times U & \xrightarrow{\phi_U} & \pi^{-1}[U] & \hookrightarrow & E \\
p_2 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{ccccc}
F' \times U & \xrightarrow{\psi_U} & \pi'^{-1}[U] & \hookrightarrow & E' \\
p_2 \downarrow & & \pi' \downarrow & & \pi' \downarrow \\
U & \xrightarrow{\mathbb{1}_U} & U & \hookrightarrow & B
\end{array}$$

Für alle $U \in \mathcal{U}$ ist die Abbildung

$$F \times F' \times U \to \bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x, \quad (f, f', x) \mapsto \Big(\phi_U|_{F \times \{x\}} f, \psi_U|_{F' \times \{x\}} f', x \Big)$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $F \times F' \times U$ über U mit Faser $F \times F'$ auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} E_x \times E'_x$ der kartesischen Produkte der Fasern von E und E' über $x \in U$. Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt

$$\Big(\phi_U|_{F \times \{x\}} \times \psi_U|_{F' \times \{x\}} \Big)(f, f') = \Big(\phi_V|_{F \times \{x\}} \times \psi_V|_{F' \times \{x\}} \Big) \circ \left(\phi_{V,U}(x) \times \psi_{V,U}(x) \right)(f, f').$$

Also sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von den Kozykeln $(\phi_{V,U} \times \psi_{V.U})_{(U,V) \in \mathcal{U}}$ definierten Vektorraumbündels $E \oplus E'$. Dann sind die Fasern des Vektorraumbündels $E \oplus E'$ isomorph zu $E_x \times E'_x$.

Analog ist für alle $U \in \mathcal{U}$ die Abbildung

$$\mathcal{L}(F, F') \times U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x), \quad (C, x) \mapsto \psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ (C \times \mathbb{1}_{\{x\}}) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x}$$

eine bijektive Abbildung von dem trivialen Vektorraumbündel $\mathcal{L}(F \times F') \times U$ über U mit Faser $\mathcal{L}(F, F')$ in die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in U} \mathcal{L}(E_x, E'_x)$ aller linearen Abbildungen von der Faser E_x von E in die Faser E'_x von E'. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_U|_{F' \times \{x\}} \circ \left(C \times \mathbb{1}_{\{x\}} \right) \circ \phi_U^{-1}\big|_{E_x} &= \psi_V|_{F' \times \{x\}} \circ \left(\psi_{V,U}(x) \circ C \circ \phi_{V,U}^{-1}(x) \times \mathbb{1}_{\{x\}} \right) \circ \phi_V^{-1}\big|_{E_x} \\
&= \psi_V|_{F' \times \{x\}} \circ \left(\Pi(\phi_{V,U}(x), \psi_{V,U}(x)) C \times \mathbb{1}_{\{x\}} \right) \circ \phi_V^{-1}\big|_{E_x}.
\end{aligned}$$

Deshalb sind diese Abbildungen verträglich mit der Äquivalenzrelation des von dem Kozykel $(\Pi(\phi_{V,U},\psi_{V,U}))_{(U,V)\in\mathcal{U}^2}$ induzierten Vektorraumbündels $\mathrm{Hom}(E,E')$. Also bestehen die Fasern von $\mathrm{Hom}(E,E')$ für alle $x\in B$ aus $\mathcal{L}(E_x,E'_x)$. **q.e.d.**

Das Vektorraumbündel $E\oplus E'$ wird Withney Summe der beiden Vektorraumbündel (E,B,π) und (E',B,π') genannt. Diese Whitney Summe können wir auch definieren durch das Faserprodukt $E\times_B E'$ als die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E\times E',B\times B,\pi\times\pi')$ auf die Diagonale von $B\times B$. Wegen der lokalen Trivialität ist die Projektion jedes Faserbündels eine Submersion. Also ist wegen Korollar 1.47 das Faserprodukt $E\times_B E'$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E\times E'$.

Beispiel 1.60. **(i)** *Das duale Bündel E' eines $\mathbb{K}$–Vektorraumbündels (E,B,π) ist das Bündel aller Homomorphismen von dem Bündel E in das triviale $\mathbb{K}$–Linienbündel $(\mathbb{K}\times B,B,p_2)$ über B. So ist z.B. für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X das Kotangentialbündel das duale Bündel $T'X$ des Tangentialbündels (TX,X,π).*

(ii) *Seien V und W zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weil alle endlichdimensionalen Vektorräume auf natürliche Weise isomorph sind zu ihren Bidualräumen, identifizieren wir das Tensorprodukt $V\otimes W$ mit $\mathcal{L}(V',W)$. Wir definieren das Tensorprodukt zweier Vektorraumbündel (E,B,π) und (F,B,π) vom Fasertyp V bzw. W als das Vektorraumbündel $E\otimes F=\mathrm{Hom}(E',F)$, der Homomorphismen von dem dualen Bündel E' von E in das Vektorraumündel F.*

Definition 1.61. *Seien X und B differenzierbare Mannigfaltigkeiten und (E,B,π) ein Vektorraumbündel und $f:X\to B$ glatt. Wegen Korollar 1.47 ist das Faserprodukt $E\times_B X$ der beiden Abbildungen $\pi:E\to B$ und $f:X\to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $E\times X$ und das Faserprodukt $B\times_B X$ der beiden Abbildungen $\mathbb{1}_B:B\to B$ und $f:X\to B$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $B\times X$. Die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E\times X,B\times X,\pi\times\mathbb{1}_X)$ auf die Untermannigfaltigkeit $B\times_B X$ definiert das Vektorraumbündel $f^*(E)=(E\times_B X,B\times_B X,\pi')$. Es wird inverses Bild des Vektorraumbündels (E,B,π) unter der Abbildung f genannt.*

Die lokalen Trivialisierungen von E induzieren lokale Trivialisierungen von $(E\times X,B\times X,\pi\times\mathbb{1}_X)$ und $(E\times_B X,B\times_B X,\pi')$. Die Einschränkung von $f\times\mathbb{1}_X:X\times X\to B\times X$ auf die Diagonale $X\simeq X\times_X X$ ist ein natürlicher Diffeomorphismus $X\simeq B\times_B X$. Dadaurch wird das Bündel $f^*(E)$ zu einem Bündel über X.

Beispiel 1.62. *Sei (E,B,π) ein Vektorraumbündel und $f:X\to B$ auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X die konstante Abbildung auf ein $b_0\in B$. Dann ist $E\times_B X=\pi^{-1}[\{b_0\}]\times X$ und $B\times_B X=\{b_0\}\times X$, und $f^*E\simeq\pi^{-1}[\{b_0\}]\times X$ trivial.*

Satz 1.63. *Seien (E,B,π) und (E',B',π') zwei Vektorraumbündel. Dann induziert jeder Morphismus (g,f) mit $g:E'\to E$ und $f:B'\to B$ von (E',B',π') auf (E,B,π)*

einen Morphismus $(h, \mathbb{1}_{B'})$ *mit* $h : E' \to f^*(E)$ *von* (E', B', π') *auf das inverse Bild* $f^*(E)$ *des Vektorraumbündels* (E, B, π) *unter der Abbildung* f*.*

Beweis: Offenbar ist $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$. Das Faserprodukt $E' \times_{B'} B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi' : E' \to B'$ und $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B' \times_{B'} B'$ bezüglich zweier glatter Abbildungen $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$ als Untermannigfaltigkeit von $B' \times B'$. Die zweite Untermannigfaltigkeit ist die Diagonale von $B' \times B'$, und die erste Untermannigfaltigkeit ist das inverse Bild $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') unter der Abbildung $\mathbb{1}_{B'} : B' \to B'$. Seien $p_{E'} : E' \times B' \to E'$ und $p_{B'} : B' \times B' \to B'$ die beiden Projektionen auf den ersten Faktor der kartesischen Produkte. Dann ist $(p_{E'}, p_{B'})$ ein Morphismus des Vektorraumbündels $(E' \times B', B' \times B', \pi' \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Vektorraumbündel (E', B', π'). Er induziert einen Isomorphismus des inversen Bildes $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ des Vektorraumbündels (E', B', π') mit dem Vektorraumbündel (E', B', π').

Das Faserprodukt $E \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\pi : E \to B$ und $f : B' \to B$ ist die Einschränkung des Vektorraumbündels $(E \times B', B \times B', \pi \times \mathbb{1}_{B'})$ auf das Faserprodukt $B \times_B B'$ bezüglich der glatten Abbildungen $\mathbb{1}_B : B \to B$ und $f : B' \to B$ als Untermannigfaltigkeit von $B \times B'$. Es ist das inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) bezüglich der glatten Abbildung f. Weil die Abbildung $f \times \mathbb{1}_{B'}$ offenbar die Diagonale $B' \times_{B'} B'$ von $B' \times B'$ auf die Untermannigfaltigkeit $B \times_B B'$ abbildet, wird durch den Morphismus $(g \times \mathbb{1}_{B'}, f \times \mathbb{1}_{B'})$ das Vektorraumbündel $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ auf das Vektorraumbündel $f^*(E)$ abgebildet. Weil $\mathbb{1}^*_{B'}(E')$ als Vektorraumbündel isomorph ist zu (E', B', π') erhalten wir einen Morphismus von (E', B', π') auf des inverse Bild $f^*(E)$ des Vektorraumbündels (E, B, π) unter der Abbildung f. **q.e.d.**

Kapitel 2

Vektorfelder

2.1 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 2.1. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Abbildung $F : X \to TX$ mit $\pi \circ F = \mathbb{1}_X$ Vektorfeld von X. Den Raum aller Vektorfelder auf X bezeichnen wir mit* $\mathrm{Vec}(X)$. *Für $r \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet* $\mathrm{Vec}^r(X)$ *den Raum aller r mal stetig differenzierbaren Vektorfelder und* $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ *den Raum aller glatten Vektorfelder.*

Satz 2.2. *Sei $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ für alle $p = 0, \ldots, r$ eine lineare Derivation*

$$\theta_F : C^{p+1}(X, \mathbb{R}) \to C^p(X, \mathbb{R}) \quad \textit{mit} \quad \theta_F(f \cdot g) = f \cdot \theta_F(g) + \theta_F(f) \cdot g,$$

und die Zuordnung $F \mapsto \theta_F$ ist injektiv. Umgekehrt gibt es für jede lineare Derivation

$$\theta : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^r(X, \mathbb{R}) \textit{ mit } \theta(fg) = f\,\theta(g) + \theta(f)g \textit{ ein } F \in \mathrm{Vec}^r(X) \textit{ mit } \theta = \theta_F\,.$$

Beweis: Für $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ist die Abbildung θ_F von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ in die reellen Funktionen auf X, deren Abbild punktweise bei $x \in X$ durch $\theta_F(f)(x) = D_{F(x)}(f)$ mit der Abbildung $D_{F(x)}$ aus Satz 1.40 definiert ist, linear und eine Derivation. Wir zeigen jetzt, dass θ_F sogar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. Wenn wir mit einer Karte ϕ dem Vektorfeld F eine r mal stetig differenzierbare Abbildung $x \mapsto T_x(\phi)(F(x)) \in T_{\phi(x)}\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n$ von dem Definitionsbereich $U \subset X$ der Karte nach $\mathbb{R}^n$ zuordnen, dann ist

$$\theta_F(f)(x) = T_x(\phi)(F(x)) \cdot \nabla(f|_U \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \quad \text{für alle } x \in U.$$

Hierbei ist $T(\phi) \circ F|_U$ die Abbildung $U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times U$. Dann bildet $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ offenbar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ ab. Aus $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ folgt für alle $p = 0, \ldots, r$ auch $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$, so dass θ_F auch $C^{p+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^p(X, \mathbb{R})$ abbildet.

Umgekehrt ist F wegen dem Satz 1.40 eindeutig durch θ_F bestimmt und genau dann r mal stetig differenzierbar, wenn θ_F $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. **q.e.d.**

Korollar 2.3. *Für Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$ und $G \in \mathrm{Vec}^q(X)$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es genau ein Vektorfeld $[F, G] \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit*

$$r = \min\{p-1, q-1\} \quad \textit{und} \quad \theta_{[F,G]} = \theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F .$$

Beweis: Offenbar ist $\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F$ eine lineare Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ auch eine Derivation. Für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
(\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f \cdot g) &= \theta_F(\theta_G(f \cdot g)) - \theta_G(\theta_F(f \cdot g)) \\
&= \theta_F(f\,\theta_G(g) + \theta_G(f)g) \qquad - \theta_G(f\,\theta_F(g) + \theta_F(f)g) \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(f)\,\theta_G(g) \qquad + \theta_G(f)\,\theta_F(g) + \theta_F(\theta_G(f))g \\
&\quad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(f)\,\theta_F(g) \qquad - \theta_F(f)\,\theta_G(g) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(\theta_G(f))g \qquad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f \cdot (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(g) \qquad + (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f) \cdot g.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Das Tangentialbündel eines endlichdimensionalen normierten Vektorraumes V ist auf natürliche Weise isomorph zu $TV \simeq V \times V$. Insbesondere ist das Tangentialbündel eines offenen Intervalls I auf natürliche Weise isomorph zu $\mathbb{R} \times I$. Deshalb enthält der Tangentialraum $T_tI \simeq \mathbb{R}$ für alle $t \in I$ außer der Null noch das Element $1_{T_t\mathbb{R}}$, das $(1, t) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ entspricht, also die Äquivalenzklasse von $(-\epsilon, \epsilon) \to I$, $s \mapsto s + t$.

Definition 2.4. *Eine Integralkurve x eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}(X)$, ist eine differenzierbare Abbildung $x : I \to X$, $t \mapsto x(t)$ von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach X, so dass $s \mapsto x(t+s)$ für alle $t \in I$ dem Element $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ entspricht. D.h. $T_t(x)$ bildet $1_{T_t\mathbb{R}} \in T_tI$ für alle $t \in I$ auf $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ ab. Wenn $t_0 \in I$ und $x(t_0) = x_0 \in X$ gilt, dann heißt x Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$.*

Wir werden jetzt zeigen, dass jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ für jedes $x_0 \in X$ genau eine Integralkurve mit Anfangswert x_0 besitzt. Diese Aussage ist eine Umformulierung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.5. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt:*

(i) *(Existenz von Integralkurven) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung*

$$x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to X, \quad t \mapsto x(t) \quad \textit{mit} \quad x(t_0) = x_0,$$

die eine Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.

(ii) *(Eindeutigkeit von Integralkurven) Seien x und y zwei Integralkurven von F auf offenen Intervallen I bzw. J. Wenn $t_0 \in I \cap J$ und $x(t_0) = y(t_0)$ gilt, dann stimmen $x(t)$ und $y(t)$ für alle $t \in I \cap J$ überein.*

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe von Karten von X bei x_0 bzw. $x(t_0)$ und der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.6. *(Picard–Lindelöf) Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Abbildung auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass das folgende Anfangswertrpoblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ eindeutig lösbar ist:*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \quad \textit{für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad \textit{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Beweis: Wegen der Lipschitzstetigkeit gibt es ein $L > 0$, so dass für alle $(s, y), (t, z) \in U$ auch $\|f(s, y) - f(t, z)\| \leq L(|s - t| + \|y - z\|)$ gilt. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass U das kartesische Produkt $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ der beiden abgeschlossenen δ–Bälle um t_0 und x_0 enthält. Dann gilt für alle $(s, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ auch $\|f(s, y)\| \leq \|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta$. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(x_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta) \leq \delta$, dann bildet sie wegen dem Schrankensatz $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $x, y \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ gilt dann

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \epsilon L \|x - y\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als

$$\epsilon \leq \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta} \right\} \leq \frac{1}{2L}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L \leq 1/2$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ mit $x(t_0) = x_0$. Also löst x dieses Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Wenn umgekehrt x auf einer Umgebung von t_0 dieses Anfangswertproblem löst, dann ist x stetig differenzierbar. Deshalb ist die Ableitung von $F(x) - x$ gleich Null, und beide Funktionen $F(x)$ und x sind bei $t = t_0$ gleich x_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven:
(i) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um $x_0 \in X$. Dann definiert

$$f = p_1 \circ T(\phi) \circ F|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi[U] \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetig differenzierbare Abbildung. Wegen dem Schrankensatz gibt es ein $r>0$, so dass die Einschränkung auf $\overline{B(\phi(x_0),r)} \subset \phi[U]$ lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $L>0$. Dann folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf, dass

$$\tilde{x} : (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \to \phi[U], \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{x}(t)$$

für ein $\epsilon>0$ als eindeutige Lösung folgenden Anfangswertproblems existiert:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}(t_0)=\phi(x_0).$$

Für jedes $t \in (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ bildet $T_t(\tilde{x})$ aufgrund der Definition der Ableitung das Element $1_{T_t\mathbb{R}} \in T_t(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)$ auf $(\frac{d\tilde{x}(t)}{dt},\tilde{x}(t)) = (f(\tilde{x}(t)),\tilde{x}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \phi[U] \simeq T\phi[U]$ ab. Wegen $T_t(x)1_{T_t\mathbb{R}} = T_{\tilde{x}(t)}(\phi^{-1}) \circ T_t(\tilde{x})1_{T_t\mathbb{R}} = F(x(t))$ ist dann $x=\phi^{-1}\circ\tilde{x}$ eine Integralkurve von F durch $x(t_0)=x_0$, wenn $\tilde{x}$ obiges Anfangswertproblem löst.
(ii) Sei $s \in I \cap J$ mit $z=x(s)=y(s)$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Karte bei $z \in U$. Dann definieren $\tilde{x}=\phi\circ x$ und $\tilde{y}=\phi\circ y$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{für alle } t \text{ in einer Umgebung von } s \quad \text{mit} \quad \tilde{x}(s)=\phi(z).$$

Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf gilt $\tilde{x}=\tilde{y}$ auf einer Umgebung von s. Weil ϕ injektiv ist folgt $x(t)=y(t)$ auf einer Umgebung von s. Daraus folgt, dass die Menge $\{t \in I\cap J \mid x(t)=y(t)\}$ offen und, wegen der Stetigkeit von x und y, abgeschlossen ist. Weil I und J Intervalle sind und $t_0 \in I\cap J$ ist $I\cap J$ ein nicht leeres Intervall und damit zusammenhängend. Also gilt $x(t)=y(t)$ für alle $t \in I\cap J$. **q.e.d.**

Satz 2.7. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Integralkurve $x : I \to X$ von F mit $x(0)=x_0$, so dass jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(0)=x_0$ eine Einschränkung von x auf ein Teilintervall J von I ist, das 0 enthält. Allgemeiner ist jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0)=x_0$ von der Form:*

$$y(t+t_0)=x(t) \text{ für alle } t+t_0 \in J, \text{ wobei } \{t \in \mathbb{R} \mid t+t_0 \in J\} \subset I.$$

Beweis: Sei I die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven x von F mit $x(0) = x_0$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven gibt es dann eine eindeutige Integralkurve x auf I mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve von F mit $y(0) = x_0$ durch Einschränken der Integralkurve x auf ein Teilintervall von I entsteht. Offenbar ist für jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0) = x_0$ die Abbildung

$$x : \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_0 \in J\} \to X, \quad t \mapsto x(t) = y(t + t_0)$$

eine Integralkurve von F mit $x(0) = x_0$. Daraus folgt die zweite Behauptung. **q.e.d.**

2.2 Flüsse und Vektorfelder

Wir wollen jetzt alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times X$ nach X zusammensetzen.

Definition 2.8. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\psi : W \to X$ mit folgenden Eigenschaften heißt lokaler Fluss auf X:*

(i) *Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.*

(ii) *Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \psi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt*

$$\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(t + s, x).$$

(iii) *Für alle $x \in X$ gilt $\psi(0, x) = x$.*

Lemma 2.9. *Für einen stetigen lokalen Fluss ψ auf dem topologischen Raum X gilt:*

(i) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$ offen und die Abbildung*

$$\psi(t, \cdot) : V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \psi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\psi(-t, \cdot)$.

(ii) *Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\psi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.*

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Aus der Bedingung (i) folgt $W \supset \{(s,x) \mid s \in [0,t]\} = \{(t+s,x) \mid s \in [-t,0]\}$. Für jedes $s \in [-t,0]$ gibt es ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung $U_s \subset X$ von $\psi(t+s,x)$ mit $(-\epsilon_s,\epsilon_s) \times U_s \subset W$. Die offene Überdeckung $(U_s)_{s\in[-t,0]}$ der kompakten Menge $\{\psi(t+s,x) \mid s \in [-t,0]\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der entsprechenden $(\epsilon_s)_{s\in[0,1]}$. Aus der Bedingung (ii) folgt für alle $s \in [-t,0]$

$$(r,\psi(t+s,x)),(t+s+r,x) \in W \text{ und } \psi(r,\psi(t+s,x)) = \psi(t+s+r,x) \text{ für alle } r \in (-\epsilon,\epsilon).$$

Wenn $(s,\psi(t,x))$ in W liegt, dann folgt wegen der Bedingung (ii) $(r,\psi(s,\psi(t,x))) = (r,\psi(s+t,x)) \in W$ und damit auch $(s+r,\psi(t,x)) \in W$ und $(t+s+r,x) \in W$ und $\psi(s+r,\psi(t,x)) = \psi(t+s+r,x)$. Induktiv folgt $(s,\psi(t,x)) \in W$ und $\psi(s,\psi(t,x)) = \psi(t+s,x)$ zuerst für $s = 0$ und dann für alle $s \in [-t,0]$. Also liegt $\psi(t,x)$ in V_{-t} und $\psi(-t,\cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\psi(t,\cdot)$. Dann sind $\psi(t,\cdot)$ und $\psi(-t,\cdot)$ Homöomorphismen.

Danach folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 2.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau einen r mal stetig differenzierbaren Fluss $\psi_F : W_F \subset \mathbb{R} \times X \to X$, so dass für alle $x \in X$ die maximale Integralkurve von F durch x aus Satz 2.7 gleich*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid (t,x) \in W_F\} \to X, \quad t \mapsto \psi_F(t,x) \quad \textit{mit} \quad \psi_F(0,x) = x$$

ist. Die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist dabei auch r mal stetig differenzierbar.

Umgekehrt gibt es für jeden r mal stetig differenzierbaren Fluss $\psi : W \subset \mathbb{R} \times X \to X$, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist, ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $W \subset W_F$ und $\psi = \psi_F|_W$.

Wir beweisen diesen Satz wieder mit Hilfe eines Satzes über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.11. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und U eine offene Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von x_0 in U, ein $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $h : (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in W$ die Funktion*

$$x : (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto h(t,y)$$

die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad \textit{für alle } t \in (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \quad \textit{mit} \quad x(t_0) = y.$$

Die partielle Ableitung von h nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil U eine offene Umgebung von x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x_0, \delta)}$ enthält. Wegen Heine–Borel ist $\overline{B(x_0, \delta)}$ kompakt. Weil f stetig differenzierbar ist, gibt es dann eine obere Schranke $L > 0$ an die Norm von $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auf $x \in \overline{B(x_0, \delta)}$. Wegen dem Schrankensatz ist dann f lipschitzstetig auf $\overline{B(x_0, \delta)}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon \leq \frac{\delta}{2\|f(x_0)\| + 2L\delta}$ so ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Sei I das abgeschlossene Intervall $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ und V die offene Umgebung $V = B(x_0, \delta/2)$ von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wieder ist für alle $y \in V$ die Abbildung

$$F_y : C(I, \overline{B(x_0, \delta)}) \to C(I, \overline{B(x_0, \delta)}),\ x \mapsto F_y(x) \text{ mit } F_y(x)(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(x(s))ds$$

von dem vollständigen metrischen Raum $C(I, \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon L \leq 1/2$. Wegen der Ungleichung $\delta/2 + \epsilon(\|f(x_0)\| + L\delta) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$ liegen die Bilder aller Abbildungen $(F_y)_{y \in V}$ sogar in der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ des Banachraumes $C(I, \mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Deshalb liegen die entsprechenden Fixpunkte in dieser offenen Teilmenge. Für alle $y \in V$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto F_y(x)$, als Abbildung der offenen Teilmenge $C(I, B(x_0, \delta))$ von $C(I, \mathbb{R}^n)$ auf sich selber gegeben durch

$$\begin{aligned} F_y'(x) : C(I, \mathbb{R}^n) &\to C(I, \mathbb{R}^n), & z \mapsto &F_y'(x)(z) \quad \text{mit} \\ F_y'(x)(z)(t) &= \int_{t_0}^{t} f'(x(s))(z(s))ds & &\text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Weil die Ableitungen $f'(s, x(s))$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $F_y'(x)$ beschränkt durch $L\epsilon \leq 1/2$. Deshalb konvergiert für alle $y \in V$ und alle $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F_y'(x)\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(F_y'(x)\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C(I, \mathbb{R}^n))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F_y'(x)$. Offenbar ist für alle $y, z \in V$ die punktweise Differenz $F_y(x) - F_z(x)$ eine konstante Abbildung in $C(I, \mathbb{R}^n)$:

$$F_y(x) - F_z(x) = y - z.$$

Deshalb ist für jedes $x \in C(I, B(x_0, \delta))$ die Abbildung $y \mapsto F_y(x)$ eine glatte Abbildung von V nach $C(I, \mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C(I, B(x_0, \delta)) \to C(I, \mathbb{R}^n), \quad (y, x) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C(I,B(x_0,\delta))} - F_y\right)(x) = x - F_y(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $x \in C(I, B(x_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen F_y. Dann folgt aus dem Satz der impliziten Funktion, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $x_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen F_y gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An den expliziten Formeln für die ersten partiellen Ableitungen von F_y erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f stetig sind. Also ist G genauso oft wie f stetig differenzierbar. Für alle $y \in W$ ist dann $g(y)$ die eindeutig Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = y.$$

Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von der Abbildung

$$h : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}, \quad (y, t) \mapsto h(t, y) = g(y)(t)$$

sind stetig. Deshalb ist diese Abbildung auch r mal stetig differenzierbar. Weil $t \mapsto h(t, y)$ das obigen Anfangswertproblem löst, ist die partielle Ableitung von $h(t, y)$ nach t gleich $\frac{\partial h(t,y)}{\partial t} = f(h(t, y))$ und damit auch r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.10: Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld. Für alle $x \in X$ sei I_x der Definitionsbereich der maximalen Integralkurven aus Satz 2.7 mit Anfangswert $x(0) = x \in X$ und $W_F = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X$. Für $x \in X$ definieren wir $t \mapsto \psi_F(t, x)$ auf $t \in I_x$ als diese maximale Integralkurve $t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = x = \psi_F(0, x)$. Dann erfüllt $\psi_F : W_F \to X$ die Bedingungen (i) und (iii).

Für $(s, x) \in W_F$ und $(t, \psi_F(s, x)) \in W_F$ stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \psi_F(s, x)$ bei s, und wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge ihrer Definitionsbereich überein. Sie ergänzen sich zu eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält mit $x(0) = x$, $x(s) = \psi_F(s, x)$ und $x(t + s) = \psi_F(t, \psi_F(s, x))$. Also erfüllt ψ_F auch (ii).

Es bleibt zu zeigen, dass W in $\mathbb{R} \times X$ offen ist und ψ_F zusammen mit $\frac{\partial \psi_F}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar ist. Sei $(t, x) \in W_F$ mit $t \geq 0$. Für $t < 0$ geht der Beweis analog. Für $s \in [0, t]$ liegt $\psi_F(s, x)$ im Definitionsbereich U_s einer Karte ϕ_s. Wie im Beweis von Satz 2.5 entsprechen den Integralkurven x von F in U_s Lösungen $\tilde{x} = \phi_s \circ x$ von

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{mit} && \tilde{x}(t_0) = \phi_s(x_0) \quad \text{und dem Vektorfeld} \\ &f : \phi_s[U_s] \to \mathbb{R}^n, && y \mapsto f(y) = T_{\phi_s^{-1}(y)}(\phi_s)(F(\phi_s^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Deshalb folgt aus Satz 2.11 dass ψ_F und $\frac{\partial \psi_F}{\partial t}$ für jedes $s \in [0, t]$ auf einer offenen Umgebung $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times V_s \subset W_F$ von $(0, \psi_F(s, x))$ r–mal stetig differenzierbar sind. Die kompakte Menge $\{\psi_F(s,x) \mid s \in [0,t]\}$ wird von den offenen Mengen V_s zu endlich vielen $s \in [0,t]$ überdeckt. Sei ϵ das Minimum der entsprechedenc $\frac{\epsilon_s}{2}$. Dann liegen alle $\psi_F(l\epsilon, x)$ mit $0 \leq l \leq \frac{t}{\epsilon}$ in einer V_{s_l} zu den endlich vielen s. Wir definieren für $1 \leq l \leq \frac{t}{\epsilon}$ induktiv offene Umgebungen $V_{s_0} = O_0 \supset O_1 \supset \ldots \supset O_l \supset \ldots \supset O$ von x:

$$O_l = \{y \in O_{l-1} \mid \psi(l\epsilon, y) \in V_{s_l}\} \quad \text{mit} \quad (-2\epsilon, (2+l)\epsilon) \times O_l \subset W_F.$$

Die kleinste O wird für $0 \leq l \leq \frac{t}{\epsilon}$ durch $\big(\psi_F(\epsilon, \cdot)\big)^l$ nach V_{s_l} abgebildet. Auf der offenen Umgebung $(-2\epsilon, t+\epsilon) \times O$ von (t,x) ist ψ_F mit $\frac{\psi_F}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar.

Sei umgekehrt $\psi : W \to X$ ein r mal stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist. Für alle $(t,x) \in W$ und $(s, \psi(t,x)) \in W$ und jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um $\psi(t,x)$ und $\psi(t+s,x)$ gilt

$$\frac{\partial\phi(\psi(t+s,x))}{\partial t} = \frac{\partial\phi(\psi(t+s,x))}{\partial s} = \frac{\partial\phi(\psi(s,\psi(t,x)))}{\partial s}$$

wegen (ii). Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t,x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial\psi(s,\psi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \psi(t,x)) = \psi(t,x)$ ist. Sei also $F \in \mathrm{Vec}(X)$: das Vektorfeld von X, das jedem $x \in X$ den Funktionswert der Abbildung

$$T_{(0,x)}(\psi) : T_{(0,x)}W \to T_x X$$

bei dem Element $(1_{T_0\mathbb{R}}, 0) \in T_0\mathbb{R} \times T_x X \simeq T_{(0,x)}W$ zuordnet. Weil die partielle Ableitung von ψ nach t r mal stetig differenzierbar ist, ist F r mal stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x \in X$, die Abbildung $t \mapsto \psi(t,x)$ eine Integralkurve des Vektorfeldes F. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass ψ eine Einschränkung von ψ_F auf die offene Teilmenge W des entsprechenden Definitionsbereiches W_F ist. **q.e.d.**

Aus Lemma 2.9 und Satz 2.10 folgt

Korollar 2.12. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit $r \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X \mid (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \psi_F(t,x)$ ist ein r mal stetig differenzierbarer Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit r mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $x \mapsto \psi_F(-t,x)$. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 2.13. **(i)** *Ein lokaler Fluss $\psi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss ψ_F ein globaler Fluss ist.*

Satz 2.14. (i) *Auf einem kompakten topologischen Raum X sind lokale Flüsse global.*

(ii) *Auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ vollständig.*

Beweis: (i) Wegen Lemma 2.9 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von x so dass $W \supset (-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U_x$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Mit dem Minimum $\epsilon > 0$ der entsprechenden ϵ_x enthält $W \supset (\epsilon, \epsilon) \times X$. Wegen der Bedingung (ii) des Flusses ist dann mit jedem (t, x) auch $\{(t+s, x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ in W enthalten. Wegen $\{0\} \times X \subset W$, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W folgende Mengen enthält, also gleich $\mathbb{R} \times X$ ist:

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s, x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t, x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

(ii) folgt aus (i) und Satz 2.10 **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis von (i) nur benutzt, dass der Definitionsbereich W des Flusses ψ für ein $\epsilon > 0$ die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf einem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 2.15. (i) *Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum ist genau dann ein globaler Fluss, wenn $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ für ein $\epsilon > 0$ in W enthalten ist.*

(ii) *Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist genau dann vollständig, wenn für ein $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ die Integralkurven von F mit Anfangswert $x(0) = x$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.* **q.e.d.**

Korollar 2.16. (i) *Für globale stetige Flüsse auf dem topologischen Raum X sind*

$$\psi(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \to C(X, X), \quad t \mapsto \psi(t, \cdot)$$

Homomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt induzieren Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Homöomorphismen von X, die als Abbildungen $\psi : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig sind, globale Flüsse.

(ii) *Für vollständige Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind $t \mapsto \psi_F(t, \cdot)$ Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X.*

Umgekehrt definieren Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Homöomorphismen von X, die als Abbildungen $\psi : \mathbb{R} \times X \to X$ zusammen mit $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar sind, vollständige Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$.

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass $V_t = X$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann besagt die Bedingung (ii) des Flusses genau, dass $t \mapsto \psi(t, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 2.9.
(ii) folgt aus (i) und und Satz 2.10. **q.e.d.**

2.3 Die Lie–Ableitung

Definition 2.17. *Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und $F \in \mathrm{Vec}^r(Y)$ ein Vektorfeld auf Y. Dann definiert*

$$T(\Phi^{-1}) \circ F \circ \Phi : X \to TX$$

ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld von X. Dasselbe gilt auch, wenn Φ ein Homöomorphismus ist, so dass Φ und Φ^{-1} $(r+1)$ mal stetig differenzierbar sind.

Im letzten Abschnitt wurden aus Vektorfeldern $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ Homöomorphismen von V_t nach V_{-t} konstruiert. Wegen Korollar 2.12 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind. Dann sind für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Abbildungen $\psi_F(t, \cdot) : x \mapsto \psi_F(t, x)$ stetig differenzierbare Homöomorphismen von offenen Umgebungen von x auf offene Umgebungen von x.

Definition 2.18. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ zwei Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Sei ψ_F der entsprechende Fluss des Vektorfeldes F. Wir definieren die Lie–Ableitung des Vektorfeldes E nach dem Vektorfeld F an der Stelle x:*

$$(\theta_F\, E)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T_{\psi_F(t,x)}\big(\psi_F(-t,\cdot)\big)\,\Big(E\big(\psi_F(t,x)\big)\Big)$$

Dabei ist zu beachten, dass $E\big(\psi_F(t,x)\big)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in $T_{\psi_F(t,x)}X$ liegt und $T_{\psi_F(t,x)}\big(\psi_F(-t,\cdot)\big)$ den Raum $T_{\psi_F(t,x)}X$ nach $T_{\psi_F(-t,\psi_F(t,x))}X = T_xX$ abbildet. Deshalb liegen die Werte von $T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in dem normierten Vektorraum T_xX, so dass die Ableitung wohldefiniert ist, und ein Element von T_xX ist. Dadurch wird $\theta_F\, E$ zu einem stetigen Vektorfeld auf X.

Satz 2.19. *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gilt:*

$$\theta_F\, E = [F, E] \quad \textit{für} \quad E, F \in \mathrm{Vec}^1(X).$$

Beweis: Sei $\Phi : Y \to X$ ein Homöomorphismus und Φ^{-1} differenzierbar. Dann sind

$$\Phi^* : C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f \circ \Phi, \quad \big(\Phi^{-1}\big)^* : C(Y, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R}), \qquad g \mapsto g \circ \Phi^{-1}$$

zueinander inverse Algebrahomomorphismen. Sei $x : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ mit $x(0) = \Phi(y)$ und $y \in Y$ in der Äquivalenzklasse von $E(\Phi(y)) \in T_{\Phi(y)}X$. Dann gilt für $g \in C^1(Y, \mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g\big((\Phi^{-1} \circ x)(t)\big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(g \circ \Phi^{-1}\big)(x(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\Phi^{-1}\big)^*(g)(x(t))$$

Mit der Definition 1.35 folgt für die entsprechenden Derivationen (vergleiche Satz 1.40)

$$\theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi}(g)(y) = \theta_E\left(\left(\Phi^{-1}\right)^*(g)\right)\left(\Phi(y)\right) \quad \text{und} \quad \theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} = \Phi^*\circ\theta_E\circ\left(\Phi^{-1}\right)^*,$$

weil das für alle $y \in Y$ und alle $g \in C^1(Y,\mathbb{R})$ gilt. Die Definitionsbereiche V_t der lokalen von $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ induzierten stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t,\cdot) : V_t \to V_{-t}$ aus Korollar 2.12 enthalten ein festes $x \in X$ für hinreichend kleine $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Wegen Satz 2.2 genügt es für $f \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ und $x \in X$ folgendes zu zeigen:

$$\theta_{\theta_F E}(f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E\left(\left(\psi_F(-t,\cdot)\right)^*(f)\right)\left(\psi_F(t,x)\right) = \theta_{[F,E]}(f)(x).$$

Lemma 2.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld auf X und $\psi_F : W_F \to X$ der entsprechende Fluss. Dann ist $f\circ\psi_F$ für jede $(r+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^{r+1}(X,\mathbb{R})$ auf W_F r mal stetig differenzierbar. Die partielle Ableitung nach t bei $t=0$*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_F^*(t,\cdot)(f) : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial(f\circ\psi_F)}{\partial t}(0,x),$$

heißt Lie–Ableitung von f nach F und ist gleich $\theta_F(f)$ und liegt in $C^r(X,\mathbb{R})$.

Beweis: Der Fluss $\psi_F : W_F \to X$ ist dadurch definiert, dass $t \mapsto \psi_F(t,x)$ für alle $x \in X$ die maximale Integralkurve aus Satz 2.7 von dem Vektorfeld F durch den Punkt x ist. Dann ist wegen der Kettenregel $\frac{\partial(f\circ\psi_F)}{\partial t}(0,x)$ gleich der Richtungsableitung von f an der Stelle $x \in X$ in Richtung $F(x)$, und wegen Satz 1.40 gleich $\theta_F(f)(x)$. **q.e.d.**

Abschluss des Beweises von Satz 2.19: Weil θ_E linear ist folgt aus dem Lemma:

$$\begin{aligned}
\theta_{\theta_F E}(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f\circ\psi_F(-t,\cdot))\circ\psi_F(t,\cdot) = \\
&= \theta_E\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\circ\psi_F(-t,\cdot)\right)\circ\psi_F(0,\cdot) + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \theta_E(f\circ\psi_F(0,\cdot))\circ\psi_F(t,\cdot) \\
&= \theta_E\circ\theta_{-F}(f) + \theta_F\circ\theta_E(f) = [\theta_F,\theta_E](f) = \theta_{[F,E]}(f).
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\quad \theta_{\theta_F E} = \theta_{[F,E]} \quad$ und damit auch $\quad \theta_F\, E = [F,E]$. **q.e.d.**

Korollar 2.21. *Für zwei Vektorfelder $E,F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Die Vektorfelder E und F kommutieren, d.h. $[E,F] = 0 = [\theta_E,\theta_F]$.*

(ii) *Für alle $x \in X$ und $s,t \in \mathbb{R}$ mit $(t,x) \in W_E, (s,x) \in W_F, (t,\psi_F(s,x)) \in W_E$ und $(s,\psi_E(t,x)) \in W_F$ gilt $\quad \psi_E(t,\psi_F(s,x)) = \psi_F(s,\psi_E(t,x))$.*

(iii) $\theta_F\, E = 0$

(iv) $\theta_E\, F = 0$

(v) *Für alle* $(t, x) \in W_F$ *gilt* $E(x) = T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot))E(\psi_F(t, x))$

(vi) *Für alle* $(t, x) \in W_E$ *gilt* $F(x) = T_{\psi_E(t,x)}(\psi_E(-t, \cdot))F(\psi_E(t, x))$

Beweis: Wegen der Bedingung (ii) an den lokalen Fluss ψ_F folgt aus (iii)

$$\frac{d}{dt}T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t, \cdot) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-(t + s), \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t + s, \cdot) =$$
$$= T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-s, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(s, \cdot)\right) \circ \psi_F(t, \cdot) = 0.$$

Also ist (iii) zu (v) äquivalent und analogerweise (iv) zu (vi). Wenn folgendes

$$E = T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t, \cdot) \text{ bzw.} \qquad F = T(\psi_E(-t, \cdot)) \circ F \circ \psi_E(t, \cdot)$$

gilt, dann sind auch die entsprechenden lokalen Flüsse gleich. Also gilt lokal

$$\psi_E(s, \cdot) = \psi_F(-t, \cdot) \circ \psi_E(s, \cdot) \circ \psi_F(t, \cdot) \qquad \psi_F(s, \cdot) = \psi_E(-t, \cdot) \circ \psi_F(s, \cdot) \circ \psi_E(t, \cdot)$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar beide äquivalent dazu, dass $\psi_E(s, \cdot)$ und $\psi_F(t, \cdot)$ lokal kommutieren, und damit auch zu (ii).

Wegen Satz 2.19 sind sowohl (iii) als auch (iv) äquivalent zu (i). Also sind sowohl (iii) und (v) als auch (iv) und (vi) äquivalent zu (i) und (ii). **q.e.d.**

Dieses Korollar besagt, dass die lokalen Homöomorphismen von zwei Vektorfeldern $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ genau dann miteinander kommutieren, wenn auch θ_E und θ_F miteinander kommutieren. Wenn die Vektorfelder vollständig sind, definieren sie zusammen eine zweidimensionale abelsche Untergruppe der Homöomorphismengruppe, bzw. der Diffeomorphismengruppe, wenn E und F glatt sind. Die Lie-Ableitung werden wir später auch auf Differentialformen definieren. Lemma 2.20 bedeutet dann, dass sie auf Funktionen mit der Richtungsableitung θ übereinstimmt.

2.4 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir das Tangentialbündel TX einer differenzierbare Untermannigfaltigkeiten X von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y als Untervektorraumbündel der Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbüdels TY von Y auf X. In einem zweiten Schritt charakterisieren wir solche Untervektorraumbündel des Tangentialbündels TY, die die Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit sind.

Satz 2.22. *Sei X eine Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann gilt folgendes:*

(i) *Die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X ist ein Vektorraumbündel über X.*

(ii) *Das Tangentialbündel TX von X ist ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$, d.h. TX ist eine Untermannigfaltigkeit von $TY|_X$ und über allen $x \in X$ ist die Faser T_xX von TX ein Untervektorraum von der Faser T_xY von TY.*

(iii) *Jeder r–mal (stetig) differenzierbare Schnitt von $TY|_X$ auf einer offenen Menge U von X ist die Einschränkung eines r–mal (stetig) differenzierbaren Schnittes von TY auf einer offenen Menge V von Y auf die Schnittmenge $U = V \cap X$.*

(iv) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(U)$ Vektorfelder auf einer in Y offenen Umgebung U von X mit $E|_X, F|_X \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt $[F, E]|_X = [F|_X, E|_X]$.*

(v) *Die Einschränkung $F|_X$ eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$ liegt genau dann in $TX \subset TY|_X$, wenn der entsprechende Fluss ψ_F die Untermannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ von W_F nach X abbildet. Dann gilt $W_{F|_X} = (\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ und $\psi_{F|_X} = \psi_F|_{W_{F|_X}}$.*

Beweis: (i) Sei $f : X \hookrightarrow Y$ die Einbettung der Untermannigfaltigkeit X in Y. Dann ist die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X das inverse Bild $f^*(TY)$ von TY unter f, also ein Vektorraumbündel auf X.
(ii) Für Jeden Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ist das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ein Untervektorraumbündel von $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Weil wegen Satz 1.45 jede Untermannigfaltigkeit X in einer Umgebung U jedes Punktes $x \in X$ bezüglich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ von Y gleich dem Urbild $X \cap U = \phi^{-1}[\mathbb{R}^n]$ eines solchen Unterraumes $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ist, ist dann TX ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$ ist.
(iii) Wir wählen eine offene Überdeckung von der Untermannigfaltigkeit $X \subset Y$ die aus Definitionsbereichen von verträglichen Karten von Y besteht, wie sie im Satz 1.45 beschrieben sind. Jeder Punkt $x \in X$ ist dann auch in dem offenen Definitionsbreich einer Karte $\phi : V \to \mathbb{R}^m$ von Y enthalten, so dass $\phi[V]$ das kartesische Produkt $\phi[U] \times W$ von dem Bild der offenen Teilmenge $U = V \cap X$ von X mit einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ ist. Weil die Verkettung einer r–mal (stetig) differenzierbare Funktion auf $\phi[U]$ mit der Projektion $p_1 : \phi[U] \times W \to \phi[U]$ eine r–mal (stetig) differenzierbare Funktion auf $\phi[V]$ ist, gilt die Aussage für alle solchen Mengen U. Indem wir eine beliebige offene Teilmenge U durch solche offene Mengen U überdecken folgt mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins die Aussage für beliebige U.
(v) Sei $f : V \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$, dessen Einschränkung $f|_{V \cap \mathbb{R}^n}$ auf die Schnittmenge $V \cap \mathbb{R}^n$ von V mit einem

Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Werten in diesem Unterraum $\mathbb{R}^n$ ist. Dann ist $f_{V\cap\mathbb{R}^n}$ eine stetig differenzierbares Vektorfeld auf $V \cap \mathbb{R}^n$. Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist dann jede Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } x(0) = y$$

eine Abbildung nach $V \cap \mathbb{R}^n$, wenn y in $V \cap \mathbb{R}^n$ liegt. Wegen Satz 1.45 liegen dann die ganzen Integralkruven von Vektorfeldern $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$, die X nach $TX \subset TY|_X$ abbilden, mit ihren Startpunkten in X. Insbesondere lassen die entsprechenden lokalen Flüsse die Untermannigfaltigkeit X invariant, und $\psi_{F|_X}$ ist die Einschränkung des Flusses ψ_F auf $(\mathbb{R} \times X) \cap W$, d.h. $W_{F|_X} = (\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ und $\psi_{F|_X} = \psi_F|_{W_{F|_X}}$.

Wenn umgekehrt die lokalen Flüsse ψ_F die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen, dann definieren sie einen lokalen Fluss auf X und wegen Satz 2.10 ein Vektorfeld auf X. Dieses Vektorfeld muss wegen der im Beweis von Satz 2.10 benutzten Formel für das Vektorfeld als partielle Ableitung des Flusses, mit der Einschränkung des entsprechenden Vektorfeldes von Y auf die Untermannigfaltigkeit X übereinstimmen.
(iv) Aus (v) folgt, für alle $x \in X$ und hinreichend kleine t

$$T(\psi_F(-t,\cdot)) \circ E \circ \psi_F(t,x) = T(\psi_{F|_X}(-t,\cdot)) \circ E|_X \circ \psi_{F|_X}(t,x).$$

Dann folgt (iv) aus Satz 2.19. **q.e.d.**

Umgekehrt stellt sich die Frage, wann ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) von dem Tangentialbündel (TY, Y, π), das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit ist.

Satz 2.23 (Frobenius)**.** *Ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) der Dimension $1 \leq d$ von (TY, Y, π) besitzt genau dann einen Atlas von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$T(\phi)[E \cap \pi^{-1}[U]] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = \ldots = x_n = 0\} \times \phi[U] \subset T\phi[U],$$

wenn für alle Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(Y)$ von E auch $[F, G]$ ein Schnitt von E ist.

Beweis: Wegen Satz 1.45 ist für jedes y_0 im Definitionsbreich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$

$$X = \{y \in U \mid \phi_{d+1}(y) = \phi_{d+1}(y_0), \ldots, \phi_n(y) = \phi_n(y_0)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit. Wenn $T(\phi)[E \cap \pi^{-1}[U]]$ von der angegeben Gestalt ist, dann ist $E|_X = TX$. Wegen Satz 2.22 (iv) ist dann $[F, G]$ für Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(Y)$ von E zuerst auf X ein Schnitt von TX, und dann auf Y eine Schnitt von E, weil alle $y_0 \in Y$ im Definitionsbreich einer solchen Karte liegen.

Es genügt die Umkehrung auf einer offenen Umgebung U eines Punktes $y_0 \in Y$ zu zeigen. Lokal ist E trivial. Wir können also vorraussetzen, dass linear unabhängige Vektorfelder $F_1, \ldots, F_d \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ existieren, deren Werte auf U die Fasern von

E aufspannen. Das Vektorfeld F_1 induziert einen lokalen Fluss ψ_{F_1}. Wir wählen eine Karte $\tilde{\psi} : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0 mit $\tilde{\psi}(y_0) = 0$ und $\theta_{F_1}(\tilde{\psi})(y_0) \neq 0$. Dann hat hat Jacobimatrix der Abbildung $x \mapsto \tilde{\psi}(\psi_{F_1}(x_1, \tilde{\psi}^{-1}(0, x_2, \ldots, x_n))$ bei $x = 0$ folgende Gestalt und Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \theta_{F_1}(\tilde{\psi}_1)(y_0) & 0 \\ \cdot & \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix} = \theta_{F_1}(\tilde{\psi}_1)(y_0) \neq 0.$$

Also definiert $\psi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{F_1}(x_1, \tilde{\psi}^{-1}(0, x_2, \ldots, x_n))$ wegen dem Satz der inversen Funktion die Umkehrabbildung einer Karte $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gebenenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0. Aufgrund der Konstruktion parametrisiert ψ_1 die Integralkurven von F_1, und längs dieser Integralkruven sind die Koordinaten $\psi_2, \ldots, \psi_n$ konstant. Also hat F_1 bezüglich der Karte ψ die Gestalt $\frac{\partial}{\partial \psi_1}$. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion in d. Für $d = 1$ hat die Karte $\phi = \psi$ diese Eigneschaften.

Wir nehmen jetzt an, dass die Umkehrung für alle Untervektorraumbündel der Dimension kleiner als $d \in \mathbb{N}$ gilt. Für jeden Schnitt $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E, ist $\tilde{F} = F - \theta_F(\psi_1)F_1$ ein Schnitt von E mit $\theta_{\tilde{F}}(\psi_1) = 0$. Deshalb induziert $\tilde{F}$ auch ein Vektorfeld an die Untermannigfaltigkeit $\tilde{U} = \{y \in U \mid \psi_1(y) = \psi_1(y_0) = 0\}$ von U. Wegen Satz 2.22 (iv) induziert dann $[\tilde{F}, \tilde{G}] \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ für zwei Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E ein Vektorfeld längs der Untermannigfaltigkeit $\tilde{U}$. Außerdem ist $[\tilde{F}, \tilde{G}]$ wegen

$$\begin{aligned}\theta_{[\tilde{F},\tilde{G}]} &= \left[\theta_{F-\theta_F(\psi_1)F_1}, \theta_{G-\theta_G(\psi_1)F_1}\right] = [\theta_F - \theta_F(\psi_1)\,\theta_{F_1}, \theta_G - \theta_G(\psi_1)\,\theta_{F_1}] \\ &= \theta_{[F,G]-\theta_F(\psi_1)[F_1,G]+\theta_G(\theta_F(\psi_1))F_1-\theta_G(\psi_1)[F,F_1]-\theta_F(\theta_G(\psi_1))F_1+\theta_{F_1}(\theta_G(\psi_1))F-\theta_{F_1}(\theta_F(\psi_1))G}\end{aligned}$$

auch ein Schnitt von E. Für alle Schnitte $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E liegen die Werte von $\tilde{F}$ auf $\tilde{U}$ in einem $d-1$–dimensionalen Untervektorraumbündel $(\tilde{E}, \tilde{U}, \pi)$ von der Einschränkung von (E, U, π) auf $\tilde{U}$. Offenbar spannen $\tilde{F}_2, \ldots, \tilde{F}_d$ die Fasern von $\tilde{E}$ auf $\tilde{U}$ auf. Wegen der Induktionsvorraussetzung gibt es eine Karte $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$T(\tilde{\phi})(\tilde{E} \cap \pi^{-1}[U]) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_d = \ldots = x_{n-1} = 0\} \times \tilde{\phi}[\tilde{U}] \subset T\mathbb{R}^{n-1}$$

auf einer gegebenfalls verkleinerten offenen Umgebung $\tilde{U}$ von y_0 in der Untermannigfaltigkeit. Insbesondere verschwinden alle Schnitte von $\tilde{E}$ auf $\tilde{\phi}_d, \ldots, \tilde{\phi}_{n-1}$. Die Umkehrabbildung $\tilde{\phi}^{-1}$ können wir wieder mit dem Fluss ψ_{F_1} zu der Umkehrabbildung $\phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{F_1}(x_1, \tilde{\phi}^{-1}(x_2, \ldots, x_n))$ einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenenfalls verkleinerten offenen Umgebung U von y_0 fortsetzten.

Es bleibt zu zeigen, dass auf dem gesamten Definitionsbreich U von ϕ die Derivationen $\theta_{F_1}, \ldots, \theta_{F_d}$ auf den Funktionen $\phi_{d+1}, \ldots, \phi_n$ verschwinden. Das Vektorfeld F_1 hat wieder die Gestalt $\frac{\partial}{\partial \phi_1}$. Also verschwindet $\theta_{F_1}(\phi_2) = 0, \ldots, \theta_{F_1}(\phi_n) = 0$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1}\,\theta_{F_i}(\phi_j) = \theta_{F_1}(\theta_{F_i}(\phi_j)) = \theta_{[F_1,F_i]}(\phi_j) \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, d \text{ und } j = d+1, \ldots, n.$$

Aus der Voraussetzung an die Schnitte von E folgt $[F_1, F_i] = c_{i1}F_1 + \ldots + c_{id}F_d$ mit glatten Funktionen c_{ik}. Also erfüllen diese Funktionen $\theta_{F_i}(\phi_j)$ längs der Integralkurven von F_1 auf denen $\phi_2, \ldots, \phi_n$ konstant sind, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit glatten Koeffizienten c_{ik}. Für $i = 2, \ldots, d$ und $j = d+1, \ldots, n$ verschwinden mit $\theta_{\tilde{F}_i}(\tilde{\phi}_{j-1})$ auch $\theta_{F_i}(\phi_j)$ auf $\tilde{U}$. Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist $\theta_{F_i}(\phi_j) = 0$ für diese i und j die eindeutige Lösung dieses Differentialgleichungssytems auf allen Integralkurven von F_1, die $\tilde{U}$ schneiden. Aufgrund der Konstruktion erfüllt dann ϕ die Bedingung im Satz auf ganz U. **q.e.d.**

Satz 2.24. *Sei (E, Y, π) ein Untervektorraumbündel von (TY, Y, π), dass die Bedingungen aus Satz 2.23 erfüllt. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ eine injektive Immersion $f : X \to Y$ von einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ und $y \in f[X]$. Sie kann in dem Sinne maximal gewählt werden, dass jedes andere f die Einschränkung auf eine offene zusammenhängende Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ in X ist.*

Beweis: Der Beweis von Lemma 1.30 zeigt auch, dass es einen abzählbaren Atlas $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_k : U_k \to B(0, r_k)$ auf offene Bälle gibt, die die erste Bedingung im Satz 2.23 erfüllen, so dass X durch $O_k = \phi_k^{-1}[B(0, \frac{r_k}{2})]$ X überdeckt wird und sich jeweils nur endlich viele U_k's schneiden. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in O_k$ gibt es dann genau eine maximale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit V von O_k mit $x \in V$ und $TV = E|_V$. Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller solcher Untermannigfaltigkeiten. Neben der Topologie τ von Y als differenzierbare Mannigfaltigkeit definieren wir eine feinere Topologie $\tilde{\tau}$. Bezüglich $\tilde{\tau}$ heißt eine Teilmenge $O \subset Y$ offen, wenn für alle $V \in \mathcal{V}$ die Urbilder von O unter den Inklusionen $V \hookrightarrow Y$ offen in V sind. Für $V \in \mathcal{V}$ sind die Schnittmengen $V \cap V'$ mit Untermannigfaltigkeiten $V' \in \mathcal{V}$ von O_k offen und die Schnittmengen der Abschlüsse $\bar{V} \cap \bar{V}'$ und $\bar{V} \cap \bar{V}''$ mit zwei verschiedenen Untermannigfaltigkeiten $V' \neq V'' \in \mathcal{V}$ von O_k disjunkt. Weil sich nur endlich viele U_k's schneiden, schneidet jedes $V \in \mathcal{V}$ höchstens endlich viele $V' \in \mathcal{V}$. Dann ist jedes $V \in \mathcal{V}$ bezüglich $\tilde{\tau}$ offen und die Einschränkung $\phi_k|_V$ der Karte mit $V \subset O_k$ eine Karte von dem lokal zusammenhängenden topologischen Raum $(Y, \tilde{\tau})$. Also sind die Zusammenhangskomponenten von $(Y, \tilde{\tau})$ offen und die Vereinigungen über Teilmengen von $\mathcal{V}$, die die Äquivalenzklassen folgender Relation bilden: Zwei $V, V' \in \mathcal{V}$ erfüllen die Relation, wenn es endlich viele $V = V_1, \ldots, V_L = V'$ in $\mathcal{V}$ gibt mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$. Also gibt es höchstens abzählbar viele Untermannigfaltigkeiten $V = V_1, \ldots, V_L \in \mathcal{V}$ mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$. Damit sind die Äquivalenzklassen höchstens abzählbar, und die Zusammenhangskomponenten von $(Y, \tilde{\tau})$ Mannigfaltigkeiten.

Das Bild einer injektiven Immersion $f : X \to Y$ mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ ist eine offene Teilmenge von $(Y, \tilde{\tau})$. Wenn X zusammenhängend ist, ist es eine offene Teilmenge der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $(Y, \tilde{\tau})$. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.25. *Finde eine Beispiel für ein Linienunterbündel E von TY auf* *einer kompakten Mannigfaltigkeit Y, so dass die injektiven Immersionen aus Satz 2.24 keine Einbettungen sind (Tip: definiere E durch ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen).*

2.5 Zusammenfassung

Wir haben jetzt drei äquivalente Beschreibungen von Vektorfeldern kennengelernt:

Schnitte des Tangentialbündels: Nach unser Definition sind Vektorfelder Schnitte des Tangentialbündels.

Derivationen: Wegen Satz 2.2 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und Derivationen von der Algebra der differenzierbaren Funktionen. Dadurch bilden die Vektorfelder eine Lie–Algebra.

Lokale Flüsse: Wegen Satz 2.10 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und lokalen Flüssen auf der Mannigfaltigkeit. Dadurch bilden die Vektorfelder so etwas wie die Lie–Algebra der lokalen Diffeomorphismengrupppe.

Die lokalen Flüsse, die von Vektorfeldern erzeugt werden, sind eindimensionale Untergruppen der lokalen Diffeomorphismen. Durch diese lokalen Diffeomorphismen können wir alle möglichen geometrischen Objekte auf der Mannigfaltigkeit transformieren. Die entsprechenden Ableitungen werden dann Lie–Ableitung genannt. Lemma 2.20 beschreibt dann die Lie–Ableitung von Funktionen, und Satz 2.19 die Lie–Ableitung von Vektorfeldern. Im nächsten Kapitel werden wir auch die Lie–Ableitung von anderen Tensorfeldern kennenlernen.

Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Multilineare Algebra

Definition 3.1. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt $A : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ n–linear wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ folgendes gilt*

$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = A((x_1, \ldots, x_n)) + A((x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))$$
$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda A((x_1, \ldots, x_n)) \text{ für } x, y \in V_1 \times \cdots \times V_n, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die punktweise Addition und Skalarmultiplikation macht diesen Raum $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W zu einem Vektorraum.

Definition 3.2. *Für endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ über $\mathbb{K}$ definiert*

$$V_1' \otimes \ldots \otimes V_n' = \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{K}).$$

das Tensorprodukt von $V_1', \ldots, V_n'$. Für Elemente $(A_1, \ldots, A_n) \in V_1' \times \ldots \times V_n'$ ist

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{K}, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A_1(v_1) \cdots A_n(v_n)$$

ein Element von $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$. Die Elemente dieser Form heißen kohärente Vektoren.

Für endlichdimensionale $V_1, \ldots, V_n$ ist die lineare Hülle der kohärenten Vektoren von $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ das ganze Tensorprodukt. Für die Definition des Tensorprodukt von unendlichdimensionalen Vektorräumen werden zusätzliche Bedingungen gestellt. Die lineare Hülle der kohärenten Vektoren bildet im allgemeinen einen dichten Unterraum. Im Folgenden sei mit Vektorraum immer ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum gemeint. Wir definieren des öfteren lineare Abbildungen nur auf den kohärenten Vektoren. Das definiert eindeutige lineare Abbildungen auf den ganzen Tensorprodukten.

Auf dem n–fachen Tensoprodukt $V'^{\otimes n}$ des Dualraumes V' eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes mit sich selber wirkt die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von n Elementen. Auf $\mathbb{K}$ wird S_n erinerseits trivial und andererseits alternierend dargestellt:

$$S_n \to \{1\}, \quad \sigma \mapsto 1 \qquad\qquad S_n \to \{1, -1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\sigma)$ gleich ± 1 ist je nachdem ob sich σ schreiben lässt als das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen. Entsprechend enthält $V'^{\otimes n}$ zwei lineare Unterräume, nämlich aller Vektoren, die sich unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_n wie die triviale bzw. die alternierende Darstellung transformieren.

Definition 3.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ wirkt die Permutationsgruppe S_n auf $V'^{\otimes n}$ durch*

$$A \mapsto \sigma.A \textit{ mit } \quad \sigma.A : V^n \to \mathbb{K} \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A\left(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}\right)$$

für alle $A \in V'^{\otimes n}$ und $\sigma \in S_n$. Auf den kohärenten Vektoren wirkt $\sigma \in S_n$ dann wie

$$\begin{aligned}\sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(v_1, \ldots, v_n) &= A_1(v_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots A_n(v_{\sigma^{-1}(n)}) = \\ &= A_{\sigma(1)}(v_1) \cdots A_{\sigma(n)}(v_n) = (A_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma(n)})(v_1, \ldots, v_n) \textit{ für } (v_1, \ldots, v_n) \in V^n.\end{aligned}$$

Die symmetrischen und antisymmetrischen Tensorprodukte sind definiert als

$$\begin{aligned} S^n V' &= \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\} \\ \bigwedge^n V' &= \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = \operatorname{sgn}(\sigma) A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\}. \end{aligned}$$

Mit SV' und $\bigwedge V'$ bezeichnen wir die direkten Summen

$$SV' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V' \quad \textit{ und } \quad \bigwedge V' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V'.$$

Dabei bezeichnet $S^0 V' = \mathbb{K}$ und $\bigwedge^0 V' = \mathbb{K}$ im Tensorprodukt $V'^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.

Satz 3.4. *Für einen n–dimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum V gibt es bilineare Abbildungen*

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A, B) \mapsto A \wedge B$$

so dass $\bigwedge V'$ zu einer distributiven $\mathbb{K}$–Algebra wird. In dieser Algebra gilt

$$B \wedge A = (-1)^{pq} A \wedge B \textit{ für alle } A \in \bigwedge^p V' \textit{ und } B \in \bigwedge^q V'.$$

Für alle $p = 0, \ldots, n$ haben sie die Dimensionen $\dim \bigwedge^p V' = \binom{n}{p}$ *und* $\dim \bigwedge V' = 2^n$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A, B) \mapsto A \wedge B = \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) \quad \text{mit}$$
$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(A \otimes B).$$

Dann gilt $\mathcal{A}^p(A) = p!A$ für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $\frac{1}{p!}\,\mathcal{A}^p : V'^{\otimes p} \to \bigwedge^p V'$ mit $A \mapsto \frac{1}{p!}\,\mathcal{A}^p(A)$ ist eine Projektion von $V'^{\otimes p}$ auf dem Unterraum $\bigwedge^p V' \subset V'^{\otimes p}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{A}^{p+q}(\mathcal{A}^p(A) \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathcal{A}^{p+q}(\sigma.A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = p!\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$
$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \mathcal{A}^q(B)) = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \sigma.B) = \sum_{\sigma \in S_q} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = q!\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$

für alle $A \in V'^{\otimes p}, B \in V'^{\otimes q}$. Daraus folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$, $B \in \bigwedge^q V'$ und $C \in \bigwedge^r V'$

$$\begin{aligned} C \wedge (B \wedge A) &= \frac{1}{(p+q)!r!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(C \otimes \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(B \otimes A)\right) = \frac{1}{r!p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(C \otimes B \otimes A) \\ &= \frac{1}{(q+r)!p!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(\frac{1}{q!r!}\,\mathcal{A}^{q+r}(C \otimes B) \otimes A\right) = (C \wedge B) \wedge A. \end{aligned}$$

Also ist $\wedge$ ein assoziatives Produkt. Induktiv in n folgt für alle $A_1, \ldots, A_n \in V'$

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n &= \tfrac{1}{(n-1)!1!}\,\mathcal{A}^n\left((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1})) \otimes A_n\right) \\ &= \tfrac{1}{(n-1)!}\,\mathcal{A}^n\left(\mathcal{A}^{n-1}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_{n-1}) \otimes A_n\right) = \mathcal{A}^n(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n). \end{aligned}$$

Die Distributivität folgt aus der Bilinearität der Abbildung

$$\wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A, B) \mapsto A \wedge B.$$

Für alle $p, q \in N$ hat folgende Permutation

$$(1, \ldots, p+q) \to (p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$$

die Signatur $(-1)^{pq}$ weil sie aus pq–Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Dann folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $B \in \bigwedge^q V'$

$$B \wedge A = \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(B \otimes A) = (-1)^{pq}\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(A \otimes B) = (-1)^{pq} A \wedge B.$$

Sei $E_1, \ldots, E_n$ eine Basis von V'. Dann gilt offenbar

$$E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p} = \mathrm{sgn}(\sigma) E_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge E_{i_{\sigma(p)}} \quad \text{für alle } \sigma \in S_p.$$

Wenn zwei Indizes gleich sind, dann gibt es eine Transposition, unter der dieses äußere Produkt das Vorzeichen wechselt. Wenn alle Indizes paarweise verschieden sind, dann sind $\{E_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes E_{i_{\sigma(p)}} \mid \sigma \in S^p\}$ linear unabhängig, und $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p} \neq 0$. Also bilden $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p V'$. Die Anzahl solcher Vektoren ist $\binom{n}{p} = \dim \bigwedge^p V'$. Mit $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ folgt $\dim \bigwedge V' = 2^n$. **q.e.d.**

Satz 3.5. *Für $\mathbb{K}$–Vektorräume V und W und $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{L}(V; W)$ ist*

$$A_1' \otimes \ldots \otimes A_p' : W'^{\otimes p} \to V'^{\otimes p}, \quad B \to B \circ (A_1 \times \ldots \times A_p)$$

eine lineare Abbildung von $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$. Für $A = A_1 = \ldots = A_p$ bildet sie $S^p W'$ und auf $S^p V'$ und $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$ ab. Die entsprechende Abbildung $\bigwedge A : \bigwedge W' \to \bigwedge V'$ ist ein Algebrahomomorphismus bezüglich des äußeren Produktes.

Beweis: $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p$ bildet $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$ ab und ist linear. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt

$$A'^{\otimes p+q}(B \otimes C) = A'^{\otimes p}(B) \otimes A'^{\otimes q}(C) \qquad \text{für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } C \in W'^{\otimes q}.$$

Außerdem ist die Abbildung $A'^{\otimes p}$ verträglich mit der Wirkung der Permutationsgruppe:

$$A'^{\otimes p}(\sigma.B) = \sigma.(A'^{\otimes p}(B)) \text{ für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } \sigma \in S_p.$$

Daraus folgt, dass $A'^{\otimes p}$ sowohl $S^p W'$ auf $S^p V'$ abbildet, als auch $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$. Zuletzt folgt auch, dass $A'^{\otimes p}$ mit $\mathcal{A}^p$ vertauscht, und deshalb

$$A'^{\otimes(p+q)}(B \wedge C) = A'^{\otimes p}(B) \wedge A'^{\otimes q}(C)$$

für alle $B \in \bigwedge^p W'$ und $C \in \bigwedge^q W'$ gilt. **q.e.d.**

Für die symmetrische Algebra $SV' = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} S^p V'$ gilt eine analoge Aussage zu Satz 3.4:

$$A_1 \cdots A_p = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_p) \text{ für alle } A_1, \ldots, A_p \in V'.$$

Eine Basis von $S^p V'$ bilden dann $E_1^{i_1} \cdots E_n^{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0$ und $i_1 + \ldots + i_n = p$. Die Dimension ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten p Elemente aus $1, \ldots, n$ mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Jede Auswahl ist durch die Angabe eindeutig beschrieben, an welcher Stelle wir jeweils zu Elementen mit größeren Indizies in $\{1, \ldots, n\}$ übergehen, also zu der Anzahl $\binom{n-1+p}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$ aus einer Menge mit $n-1+p$ verschiednen Elementen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $n-1$ Elementen auszuwählen. Diese Dimension wächst mit p an und SV' ist unendlichdimensional. Diese Algebra ist der Raum der Polynome auf V. Im Folgenden benutzen wir nur die antisymmetrische Algebra.

3.2 Tensorfelder

Auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V definiert jedes $v \in V$ das Element $A \mapsto A(v)$ von V''. Die entsprechende Abbildung von V nach V'' ist ein isometrischer Isomorphismus. Wir definieren das Tensorprodukt $V^{\otimes p}$ als $V''^{\otimes p} = \mathcal{L}(V', \ldots, V'; \mathbb{K})$. Es enthält eine Basis von kohärenten Vektoren $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ mit $v_1, \ldots, v_p \in V$. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ wird dann A'' auf natürliche Weise mit A identifiziert: $A''(v)(B) = B(A(v)) = A(v)(B)$.

Wir definieren jetzt auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ ein Vektorbündel $T^q_p X$. Indem wir die zusammenhängenden Komponenten einzeln betrachten, können wir annehmen, dass X die Dimension n hat. Sei also F der Vektorraum $(\mathbb{R}^n)'^{\otimes q} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes p}$ und sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi_U : U \to \mathbb{R}^n$. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ sind die Abbildungen

$$T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1}) : T'_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T'_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n, \quad T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) : T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n$$

Elemente von $GL(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren eine entsprechende Abbildung in $GL(F)$ durch

$$\Phi_{V,U}(x) = T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1})^{\otimes q} \otimes T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})^{\otimes p}.$$

Die rechten p Faktoren sind dabei genau die Werte der Kozykel des Tangentialbündels und die linken q Faktoren die Kozykel des Kotangentialbündles. Weil beide einzeln die Kozykelbedingung erfüllen, gilt das auch für $\Phi_{V,U}$.

Definition 3.6. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann sei $T^q_p X$ das durch die Kozykel $\Phi_{V,U}$ definierte Vektorraumbündel. Insbesondere ist $T^0_1 X = TX$ das Tangentialbündle und $T^1_0 X = T'X$ das Kotangentialbündel. Die Fasern von $T^q_p X$ bzw. $T'X$ über einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $T^q_{p,x} X$ bzw. $T'_x X$.*

Schnitte der Vektorraumbündel $T^q_p X$ nennen wir Tensorfelder. Wir können die Lie-Ableitung auf solchen Tensorfeldern definieren.

Definition 3.7. *Sei $f : X \to T^q_p X$ ein differenzierbares Tensorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X. Dann sind für kleine t $\psi_F(t, \cdot)$ und $\psi_F(-t, \cdot)$ lokal stetig differenzierbare Homöomorphismen von X. Wir definieren die Lie-Ableitung von f an der Stelle $x \in X$ als*

$$(\theta_F\, f)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t, \cdot))\right)^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot))\right)^{\otimes p} f(\psi_F(t, x)).$$

Wir bemerken, dass wegen $T_x(\psi_F(t, \cdot)) : T_x X \to T_{\psi_F(t,x)} X$ die Abbildungen

$$T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot)) : \; T_{\psi_F(t,x)} X \to T_x X \quad \text{und} \quad T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t, \cdot)) : \; T'_{\psi_F(t,x)} X \to T'_x X$$

zusammen folgende Abbildung induzieren:

$$\left(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t,\cdot))\right)^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p} : T^q_{p,\psi_F(t,x)}X \to T^q_{p,x}X.$$

Deshalb ist die Ableitung auf der rechten Seite als die Ableitung einer differenzierbaren Funktion von $t \in (-\epsilon, \epsilon$ in den Vektorraum $T^q_{p,x}X$ wohl definiert.

Definition 3.8. *(Verjüngung): Sei $p, q \in \mathbb{N}$. Dann induzieren für jedes $i = 1, \ldots, p$ und jedes $j = 1, \ldots, q$ die Abbildungen*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T'_x X \otimes T_x X \to \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v \rangle$$

einen Verjüngungsmorphismus i^j_i von dem Vektorraumbündel $T^q_p X$ auf das Vektorraumbündel $T^{q-1}_{p-1}X$. Hierbei bezeichnet $\langle u, v\rangle$ die Auswertung der Elemente von $T'_x X$ auf den Elementen von $T_x X$. Wenn $f_1, \ldots, f_p$ Vektorfelder sind, und $g_1, \ldots, g_q$ Schnitte von dem Kotangentialbündel, dann wirkt i^j_i auf $g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ wie

$$i^j_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) = \langle g_j, f_i\rangle g_1 \otimes \ldots \hat{g}_j \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_i \ldots \otimes f_p.$$

Hierbei ist $\langle g_j, f_i\rangle$ die Funktion $x \mapsto \langle g_j(x), f_i(x)\rangle$ auf X und $\hat{}$ beduetet, dass der entsprechende Faktor in dem Tensorprodukt weggelassen wird.

Satz 3.9. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Seien $i < j$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, p\}$ und $k < l$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, q\}$. Dann vertauschen die folgenden Verjüngungsmorphismen:*

$$\begin{array}{ccc} T^q_p X & \xrightarrow{i^k_i} & T^{q-1}_{p-1}X \\ i^l_j \downarrow & & \downarrow i^{l-1}_{j-1} \\ T^{q-1}_{p-1}X & \xrightarrow{i^k_i} & T^{q-2}_{p-2}X \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} T^q_p X & \xrightarrow{i^l_i} & T^{q-1}_{p-1}X \\ i^k_j \downarrow & & \downarrow i^k_{j-1} \\ T^{q-1}_{p-1}X & \xrightarrow{i^{l-1}_i} & T^{q-2}_{p-2}X \end{array}.$$

(ii) *Die Lie-Ableitung θ_F vertauscht mit allen Verjüngungsmorphismen i^j_i mit $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$. D.h. für alle differenzierbaren Schnitte f von $T^q_p X$ und alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\theta_F(i^j_i(f)) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) *Sei f ein Schnitt von $T^q_p X$ und g ein Schnitt von $T^s_r X$. Dann gilt*

$$\theta_F(f \otimes g) = \theta_F(f) \otimes g + f \otimes \theta_F(g).$$

Beweis: (i) Seien $F_1, \ldots, F_p$ Vektorfelder von X und $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ Schnitte des Kotangentialbündels $T'X$ von X. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} i^{l-1}_{j-1} \circ i^k_i(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ &= \langle \alpha_l, F_j \rangle \langle \alpha_k, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ &= i^k_i \circ i^l_j(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\langle \alpha_k, F_i \rangle : x \mapsto \langle \alpha_k(x), F_i(x) \rangle$ und $\langle \alpha_l, F_j \rangle : x \mapsto \langle \alpha_l(x), F_j(x) \rangle$ Funktionen, und $\hat{\cdot}$ bedeutet, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Genauso gilt auch

$$\begin{aligned} i^k_{j-1} \circ i^l_i(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ &= \langle \alpha_k, F_j \rangle \langle \alpha_l, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ &= i^{l-1}_i \circ i^k_j(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

(ii) Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y. Dann sei $T^q_p(\Phi) : T^q_p Y \to T^q_p X$ folgende faser weise lineare Abbildung

$$(T'_{\Phi(x)}(\Phi)^{\otimes q} \otimes T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})^{\otimes p} : T^q_{p,\Phi(x)} Y \to T^q_{p,x} X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei sind die einzelnen Abbildungen wegen $T_x(\Phi) : T_x X \to T_{\Phi(x)} Y$ von der Form

$$T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) : \qquad T_{\Phi(x)} Y \to T_x X \qquad \text{und} \qquad T'_{\Phi(x)}(\Phi) : \qquad T'_{\Phi(x)} Y \to T'_x X.$$

Dann kommutiert folgendes Diagramm, weil für $u \in T'_{\Phi(x)} Y$ und $v \in T_\Phi(x) Y$ auch $\langle T'_{\Phi(x)}(\Phi) u, T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) v \rangle = \langle u, T_x(\Phi) \circ T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) v \rangle = \langle u, v \rangle$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} T^q_p Y & \xrightarrow{T^q_p(\Phi)} & T^q_p X \\ i^j_i \downarrow & & \downarrow i^j_i \\ T^{q-1}_{p-1} Y & \xrightarrow{T^{q-1}_{p-1}(\Phi)} & T^{q-1}_{p-1} X \end{array}$$

Also ist für jeden Schnitt f von dem Vektorraumbündel $T^q_p(Y)$ die Abbildung $T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi$ ein Schnitt von dem Vektorraumbündel $T^q_p(X)$ ist und es gilt

$$T^{q-1}_{p-1}(\Phi) \circ i^j_i \circ f \circ \Phi = i^j_i \circ T^q_p(\Phi) \circ f \circ \Phi.$$

Für die lokalen stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ gilt also auch

$$T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i^j_i \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i^j_i \circ T^q_p(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot).$$

Indem wir die linke und die rechte Seite nach t differenzieren erhalten wir $\theta_F(i_i^j(f)) =$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T_{p-1}^{q-1}(\psi_F(t,\cdot))\circ i_i^j \circ f \circ \psi_F(t,\cdot) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} i_i^j \circ T_p^q(\psi_F(t,\cdot))\circ f\circ\psi_F(t,\cdot) = i_i^j(\theta_F(f)).$$

(iii) folgt aus der verallgemeinerten Leibnizregel. **q.e.d.**

Aus (ii) und (iii) folgt für alle $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und alle Schnitte α von $T'X$

$$\langle \theta_F\,\alpha, E\rangle = \theta_F(\langle\alpha, E\rangle) - \langle\alpha, [F,E]\rangle \quad \text{wegen} \quad \theta_F(\langle\alpha, E\rangle) = \langle\theta_F\,\alpha, E\rangle + \langle\alpha, \theta_F\,E\rangle.$$

Mithilfe von (iii) lassen sich dann die Lie-Ableitungen von beliebigen Tensorprodukten von Vektorfeldern und Schnitten des Kotangentialbündels berechnen.

3.3 Differentialformen

Definition 3.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei dann $\bigwedge^p X$ das antisymmetrische Untervektorraumbündel von T^pX. Analog sei $\bigwedge X$ die direkte Summe aller Vektorraumbündel $\bigwedge^p X$. Die Schnitte von $\bigwedge^p X$ heißen p–Differentialformen oder nur Differentialformen.*

Das p–fache antisymmetrische Tensorprodukt $\bigwedge^p V'$ des Dualraumes V' eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist ein Unterraum des p–fachen Tensorproduktes $V'^{\otimes p}$ von V' mit sich selber. Deshalb sind die Elemente von $\bigwedge^p V'$ antisymmetrische p–lineare Abbildungen von V^p nach $\mathbb{K}$. Wenn $\alpha \in \bigwedge^p V'$ ein Element dieses p–fachen antisymmetrischen Tensorproduktes ist, und $v_1, \ldots, v_p \in V$ Elemente von V sind, dann können wir α auf $(v_1, \ldots, v_p) \in V^p$ auswerten. Diese Auswertung ist antisymmetrisch in $v_1, \ldots, v_p$. Wir wollen sie folgendermaßen bezeichnen:

$$\langle\alpha, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p\rangle.$$

Das heißt insbesondere für Elemente $A_1, \ldots, A_p \in V'$ und Elemente $v_1, \ldots, v_p \in V$:

$$\langle A_1 \wedge \ldots \wedge A_p, v_1 \otimes \ldots \otimes v_p\rangle = \sum_{\sigma\in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\langle A_{\sigma(1)}, v_1\rangle \cdots \langle A_{\sigma(p)}, v_p\rangle = \det\big(\langle A_i, v_j\rangle\big).$$

Auf Differentialformen angewendet heißt das, dass für jede r mal stetig differenzierbare p–Differentialform α und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^r(X)$, die Auswertung der Differentialform α auf dem Schnitt $F_1 \otimes \ldots \otimes F_p$ des Vektorraumbündels T_p^0X eine r mal stetig differenzierbare reelle Funktion in $C^r(X, \mathbb{R})$ ergibt:

$$\langle\alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_p\rangle \in C^r(X, \mathbb{R}).$$

Definition 3.11. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}(X)$ ein Vektorfeld von X. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei i_F der eindeutig bestimmte Morphismus $i_F : \bigwedge^p X \to \bigwedge^{p-1} X$, der auf p–Differentialformen α wirkt für alle $F_1, \ldots, F_{p-1} \in \mathrm{Vec}(X)$ wie*

$$\langle i_F \circ \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle = \langle \alpha, F \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle.$$

Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, dann ist $\bigwedge^p X$ ein Vektorraumbündel der Dimension $\binom{n}{p}$. Für $p > n$ ist also $\bigwedge^p X$ Null-dimensional und $\bigwedge X$ ist ein Vektorraumbündel der Dimension 2^n. Der Grund, dass wir gerade die antisymmetrischen Untervektorraumbündel von den Tensorprodukten des Kotangentialbündels und nicht von dem Tangentialbündel betrachten, ist dass die entsprechenden Schnitte, also die Differentialformen, das richtige Transformationsverhalten haben, um sie zu integrieren. Diese Differentialformen werden sich als sehr natürliche Objekte herausstellen. Eine schöne Eigenschaft können wir sofort ablesen: Sie lassen sich unter einer differenzierbaren Abbildung zurückziehen, während sich Vektorfelder nur unter invertierbaren differenzierbaren Abbildungen transformieren lassen.

Satz 3.12. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine stetig differenzierbare Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

(i) *Das faserweise äußere Produkt $\wedge : \bigwedge^p X \times_X \bigwedge^q X \to \bigwedge^{p+q} X$ macht die Differentialformen von X zu einer assoziativen Algebra mit dem äußeren Produkt*

$$\wedge : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β mit $p, q \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist $\bigwedge^0 X$ das triviale reelle Linienbündel $\mathbb{R} \times X$ über X. Die 0–Differentialformen sind reelle Funktionen und die Multiplikation einer reellen Funktion f mit einer p–Differentialformen α schreiben wir als $(f, \alpha) \to f\alpha$.

(ii) *Für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) *Für alle $x \in X$ bilden die Abbildungen*

$$\bigwedge^p (T'_{f(x)}(f)) : \quad \bigwedge^p_{f(x)} Y \to \bigwedge^p_x X \text{ wegen } \quad T'_{f(x)}(f) : \quad T'_{f(x)} Y \to T'_x X$$

einen Algebrahomomorphismus von $\bigwedge_{f(x)} Y$ nach $\bigwedge_x X$. Jede p–Differentialform α auf Y definiert also mittels f folgende p–Differentialform $f^*\alpha$ auf X:

$$(f^*\alpha)(x) = \bigwedge^p_{f(x)} (T'_{f(x)}(f))(\alpha(f(x))).$$

(iv) *f^* ist ein Algebrahomomorphismus von den Differentialformen auf Y auf die Differentialformen auf X, d.h. für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β von Y gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

(v) *Für $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wirkt die Lie-Ableitung θ_F auf den Differentialformen wie*

$$\theta_F\,\alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t,\cdot)\alpha.$$

Sie ist eine Derivation, d.h. für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt

$$\theta_F(\alpha \wedge \beta) = \theta_F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_F(\beta).$$

(vi) *Für $F \in \mathrm{Vec}(X)$ induziert $i_F : \bigwedge X \to \bigwedge X$ eine Antiderivation auf den Differentialformen, d.h. für alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β gilt*

$$i_F(\alpha \wedge \beta) = i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta).$$

Außerdem gilt $\quad i_F \circ i_F = 0.$

(vii) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt* $\quad \theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E = i_{[E,F]}.$

Beweis: (i)–(iv) folgen aus den den Sätzen 3.4–3.5 über antisymmetrische Tensorprodukte im ersten Abschnitt. Wegen Satz 3.9 (iii) gilt für 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$

$$\theta_F(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\sigma \in S_p} \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \theta_F\,\alpha_{\sigma(i)} \otimes \cdots \otimes \alpha_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \theta_F\,\alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_p.$$

Daraus folgt (v). Zum Beweis von (vi) betrachten wir 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1}$. Dann gilt $\quad \langle i_F(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p), F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle \alpha_{\sigma(1)}, F \rangle \cdot \langle \alpha_{\sigma(2)}, F_1 \rangle \cdots \langle \alpha_{\sigma(p)}, F_{p-1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_i, F \rangle \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge i_F(\alpha_i) \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir jede Permutation $\sigma \in S_p$ zerlegt in die Verkettung $\tau \circ \sigma_i$ einer der Permutationen $\sigma_i : (1, \ldots, p) \mapsto (i, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, p)$ und einer Permutation $\tau \in S_{p-1}$ der

Elemente $\{2,\ldots,p\}$. Diese Zerlegung ist eine bijektive Abbildung $S_p \simeq (S_{p-1})^p$. Die erste Permutation σ_i hat als ein Produkt von $(i-1)$ Transpositionen $\operatorname{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$. Wegen der letzten Gleichung ist i_F eine Antiderivation. Weil die Auswertung von p–Differentialformen antisymmetrisch in den Vektorfeldern ist, folgt $i_F \circ i_F = 0$.

Zum Beweis von (vii) zeigen wir mit (v) und (vi) zunächst, dass $\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E$ eine Antiderivation ist. Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt

$$\begin{aligned}(\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E)(\alpha \wedge \beta) &= \\ &= \theta_E(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_E(\beta)) \\ &= \theta_E(i_F(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \theta_E(i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha)) \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge i_F(\theta_E(\beta)).\end{aligned}$$

Dann genügt es (vii) für differenzierbare 1–Differentialform α zu zeigen. Sei also $F \in \operatorname{Vec}^1(X)$. Dann gilt wegen der Schlussfolgerung nach Satz 3.9

$$\theta_E(i_F(\alpha)) - i_F(\theta_E(\alpha)) = \theta_E\langle \alpha, F\rangle - \langle \theta_E\, \alpha, F\rangle = \langle \alpha, \theta_E\, F\rangle = i_{[E,F]}\alpha. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Die Lie–Ableitung θ_F stimmt wegen Lemma 2.20 auf den 0–Differentialformen mit der vorher definierten Derivation θ_F auf den Funktionen überein.

3.4 Die äußere Ableitung

Definition 3.13. *Für jeden Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und jede differenzierbare reelle Funktion f auf X definiert die lineare Abbildung*

$$df(x) : T_xX \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v(f)$$

aus Satz 1.40 ein Element von T'_xX. Dadurch wird für jede differenzierbare Funktion f auf X der Gradient df von f zu einem globalen Schnitt von $T'X$:

$$df : X \to T'X \quad \textit{mit} \quad \langle df, F\rangle = \theta_F(f) \quad \textit{für alle } F \in \operatorname{Vec}(X).$$

Wir wollen $d : f \mapsto df$ zu einer Abbildung auf allen Differentialformen fortsetzen.

Satz 3.14. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ einen eindeutigen Differentialoperator d von den differenzierbaren p–Differentialformen in die $(p+1)$–Differentialformen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle differenzierbaren p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) *Auf differenzierbaren Funktionen f (also $p = 0$) wirkt d wie $f \mapsto df$ (siehe oben).*

(iii) *Für jede zweimal differenzierbare Funktionen f gilt $d(df) = 0$.*

Beweis: Wir werden gleich sehen, dass jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von p–Differentialformen folgender Form ist:

$$\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p.$$

Die Bedingungen (i)-(iii) erzwingen, dass auf solchen p–Differentialformen d wirkt wie

$$d\alpha = df \wedge dg_1 \wedge \ldots dg_p.$$

Also ist der Differentialoperator d durch die Bedingungen (i)-(iii) eindeutig bestimmt.

Um obige Aussage und die Existenz zu beweisen, wählen wir eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um einen beliebigen Punkt $x \in U \subset X$. Die Komponenten $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sind glatte Funktionen auf U, so dass $d\phi_1(x), \ldots, d\phi_n(x)$ an allen Punkten $x \in U$ eine Basis des Kotangentialraums bilden. Also ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von Differentialformen der Form

$$f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Für eine differenzierbaren Funktion f ist df auf U folgende Linearkombination:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) \cdot d\phi_i(x)$$

von $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ (vergleiche Satz 1.40). Dann folgt

$$d(f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \; d\phi_i \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Also ist d auf allen p–Differentialformen definiert. Wir müssen noch zeigen, dass (i) und (iii) gelten. Wir zeigen zunächst (iii). Aufgrund der Konstruktion von d gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_j \wedge d\phi_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot (d\phi_j \wedge d\phi_i + d\phi_i \wedge d\phi_j) = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir mit dem Schwarz'sche Lemma die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht. Wegen der Linearität genügt es (i) für Differentialformen

$$\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \quad \text{und} \quad \beta = g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}$$

zu zeigen. Für diese gilt

$$
\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= fg d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
d(\alpha \wedge \beta) &= (f dg + g df) d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q} \\
&= (df \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&\quad + (-1)^p (f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) \wedge (dg \wedge d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}) \\
&= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Satz 3.15. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Für jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt $d(d\alpha) = 0$.*

(ii) *Für jede zweimal differenzierbare Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und jede differenzierbare p–Differentialform α auf Y ist $f^*\alpha$ eine differenzierbare p–Differentialform auf X und es gilt*

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

(iii) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare Funktion g gilt*

$$\theta_F(dg) = d(\theta_F(g))$$

(iv) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F \, d\alpha = d(\theta_F \, \alpha)$$

(v) *Für jedes $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und jede differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F \, \alpha = (i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha).$$

(vi) *Für jede differenzierbare p–Differentialform α und $F_0, \ldots, F_p \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$
\begin{aligned}
\langle d\alpha, F_0 \otimes \ldots \otimes F_p \rangle = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, \theta_{F_i}(\langle \alpha, F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \otimes F_p \rangle) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \langle \alpha, [F_i, F_j] \otimes F_0 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \rangle.
\end{aligned}
$$

Beweis: (i) Sei α wie im Beweis von (i) des vorangehenden Satzes $\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$. Dann gilt wegen (i) und (iii) aus dem vorangehenden Satz

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p) \\ &= d(df) \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge d(dg_j) \wedge \ldots \wedge dg_p = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Kettenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen g auf Y bei $x \in X$

$$(d(f^*g))(x) = (d(g \circ f))(x) = dg(f(x)) \circ T_x(f) = T'_{f(x)}(f) \circ dg(f(x)) = (f^*dg)(x).$$

Dann folgt (ii) aus (i), der Linearität von d, der Konstruktion von d im Beweis des vorangehenden Satzes und aus Satz 3.12 (iv): Sei $\alpha = gdg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d\big(f^*g(f^*dg_1) \wedge \ldots \wedge (f^*dg_p)\big) & &= d\big((f^*g)d(f^*g_1) \wedge \ldots \wedge d(f^*g_p)\big) \\ &= (f^*dg) \wedge (f^*dg_1) \wedge \ldots \wedge (f^*dg_p) & &= f^*d(gdg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p) = f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

(iii) Aus $\langle dg, E\rangle = \theta_E(g)$ und der Schlussfolgerung nach Satz 3.9 folgt für $E \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\begin{aligned} \langle \theta_F(dg) - d(\theta_F(g)), E\rangle &= \langle \theta_F(dg), E\rangle & & & &- \langle d(\theta_F(g)), E\rangle \\ &= \theta_F(\langle dg, E\rangle) & &- \langle dg, [F,E]\rangle & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= \theta_F(\theta_E(g)) & &- \theta_{[F,E]}(g) & &- \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= [\theta_F, \theta_E](g) & &- \theta_{[F,E]}(g) & &= 0. \end{aligned}$$

(iv) Wegen Satz 3.15 (i) ist d eine Antiderivation. Also ist $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ genauso wie im Beweis von Satz 3.12 (vii) eine Antiderivation. Dann genügt es (iv) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ und zu zeigen. Beides folgt aus (iii):

$$\theta_F(d \circ dg) = 0 = d \circ d\,\theta_F(g) = d\,\theta_F(dg).$$

(v) Wegen Satz 3.15 (i) und Satz 3.12 (vi) sind sowohl d als auch i_F Antiderivationen. Dann ist $i_F \circ d + d \circ i_F$ eine Derivation: Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt nämlich $\qquad (i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= i_F(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) + d(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) \\ &= i_F(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge i_F(d\beta) + d(i_F(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge d(i_F(\beta)). \end{aligned}$$

Also genügt es (v) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ zu zeigen. Für Funktionen $\alpha = g$ ist $i_F\alpha = 0$ und (v) folgt aus $\theta_F(g) = i_F(dg) = \langle dg, F\rangle$. Für $\alpha = dg$ ist $d\alpha = 0$ und $\theta_F(dg) = d\,\theta_F(g) = d\langle dg, F\rangle = di_F\alpha$ folgt aus (iii).

Wegen (v) gilt induktiv in p

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d &= i_{F_p}\cdots i_{F_1}\,\theta_{F_0} - i_{F_p}\cdots i_{F_1}di_{F_0} \\ &= (-1)^{p+1}di_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\,i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Auf p–Differentialformen α verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite. Wegen Satz 3.12 (vii) gilt $i_{F_j}\,\theta_{F_i} = \theta_{F_i}\,i_{F_j} + i_{[F_j,F_i]}$. Die Summanden sind dann

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\,i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0} = {}&\theta_{F_i}\,i_{F_p}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &+ \sum_{j=i+1}^{p} i_{F_p}\cdots i_{F_{j+1}}i_{[F_j,F_i]}i_{F_{j+1}}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Wegen der Antisymmetrie gilt $i_{F_i}i_{F_j} = -i_{F_j}i_{F_i}$. Dann folgt insgesamt (vi):

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d = {}&(-1)^{p+1}di_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\theta_{F_i}\,i_{F_p}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &+ \sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}i_{F_p}\cdots\widehat{i_{F_j}}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0}i_{[F_i,F_j]}. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Für jede differenzierbare 1–Differentialform ω und $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wird (vi) zu

$$\langle d\omega, E\otimes F\rangle = \theta_E\langle\omega, F\rangle - \theta_F\langle\omega, E\rangle - \langle\omega, [E,F]\rangle.$$

Die Formel (vi) drückt die äußeren Ableitung einer Differentialform durch Lie–Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern aus. Umgekehrt drückt die Formel (v) die Lie–Ableitung einer Differentialform durch die äußere Ableitung aus.

3.5 Orientierungen

Für die Integration von Differentialformen müssen wir noch den Begriff der Orientierung einführen. Weil die Übergangsfunktionen zwischen zwei verträglichen Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind, liegen ihre Ableitungen in $GL(\mathbb{R}^n)$. Sie werden also durch reelle $n\times n$ Matrizen beschrieben, deren reelle Determinante ungleich Null ist.

Definition 3.16. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Atlas von X orientiert, wenn die Ableitungen der Übergangsfunktionen, zwischen zwei Karten mit nicht schnittfremdem Definitionsbereich jeweils positive Determinante haben.*

Wenn X einen solchen orientierten Atlas besitzt, dann heißt X orientierbar. Andernfalls heißt X nicht orientierbar. Eine Orientierung von X ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten, wobei zwei orientierte Atlanten äquivalent sind, wenn die Vereinigung der beiden orientierten Atlanten wieder ein orientierter Atlas ist.

Die invertierbare lineare Abbildung

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto I(x) \quad \text{mit} \quad I(x) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hat offenbar Determinante -1 und ist eine Involution, d.h. ihr Quadrat ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Verkettung $I \circ \phi$ mit I auch eine Karte von X. Wenn also von zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Ableitung der Übergangsfunktionen $(\psi \circ \phi^{-1})'$ auf einer Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ negative Determinante hat, dann hat die Ableitung der Übergangsfunktion $((I \circ \psi) \circ \phi^{-1})'$ bzw. $(\phi \circ (I \circ \psi)^{-1})'$ positive Determinante auf der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ bzw. $I \circ \phi[U \cap V]$. Also können wir versuchen einen Atlas von X dadurch zu einem orientierten Atlas zu machen, dass wir einige Karten des Atlases durch die Verkettung mit I ersetzen. Wenn X orientierbar ist, dann ist das möglich.

Satz 3.17. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist folgendes äquivalent*

(i) *X ist orientierbar.*

(ii) *Jede zusammenhängende Komponente von X ist orientierbar.*

(iii) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X ist $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial.*

(iv) *Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X gibt es eine stetige* $\dim(Y)$*–Differentialform, die keine Nullstellen auf Y hat.*

Beweis:(i) $\Longleftrightarrow$(ii): Offenbar sind (ii) und (i) äquivalent.
(ii)$\Rightarrow$(iv): Sei Y eine orientierbare zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ eine n–Differentialform, die offenbar keine Nullstellen hat, weil $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ alle linear unabhängig sind. Für eine zweite Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von Y ist $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi \circ \phi^{-1})' \circ \phi d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$, weil für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$d\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi_i \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j} \circ \phi \cdot d\phi_j.$$

Also sind auf $U \cap V$ die beiden n–Differentialformen $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$ durch eine positive glatte Funktion proportional zueinander. Die Überdeckung

durch die Definitionsbereiche der Karten des orientierten Atlases von Y besitzt eine entsprechende Zerlegung der Eins $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Die Summe über die Produkte von h_m mit den $d\phi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_n$, außhalb deren Definitionsbreichen h_m verschwinden, ist eine globale glatte $\dim(Y)$–Differentialform auf Y ohne Nullstellen.
(iii) $\Longleftrightarrow$(iv): Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.58, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ genau dann trivial ist, wenn es einen globalen glatten Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Also sind (iii) und (iv) äquivalent.
(iv)$\Rightarrow$(ii): Sei ω eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform auf der zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y ohne Nullstellen. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eines Atlases von Y gilt dann $\omega = fd\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die keine Nullstellen hat. Die Urbilder $f^{-1}[(-\infty,0)] = f^{-1}[(-\infty,0]]$ und $f^{-1}[(0,\infty)] = f^{-1}[[0,\infty)]$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Deshalb ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von U entweder positiv oder negativ. Das Vorzeichen von $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ dreht sich um, wenn wir ϕ durch $I\circ\phi$ ersetzen. Indem wir auf denjenigen Zusammenhangskomponenten von Definitionsbereichen von Karten des Atlases die Karte mit I verknüpfen, auf denen das entsprechende f negativ (bzw. positiv) ist, erhalten wir einen Atlas von Y, so dass für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, die entsprechenden Funktionen f mit $\omega = fd\phi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_n$ positiv (bzw. negativ) sind. Für zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U\cap V \neq \emptyset$ dieses Atlases gilt mit entsprechenden positiven Funktionen f und g auf $U\cap V$

$$\omega = fd\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n = gd\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n.$$

Weil dann $\det(\psi\circ\phi^{-1})'\circ\phi\cdot\omega/f = \omega/g$ und $\det(\psi\circ\phi^{-1})'\circ\phi = f/g > 0$ auf $U\cap V$ gilt, ist der neue Atlas von Y orientiert. Daraus folgt (ii). **q.e.d.**

An diesem Beweis erkennen wir auch, dass jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit X genau zwei Orientierungen besitzt. Die zweite erhalten wir aus der ersten, indem wir alle Karten mit I verknüpfen. Allgemein besitzt jede orientierbare Mannigfaltigkeit mit N zusammenhängenden Komponenten genau 2^N Orientierungen.

Beispiel 3.18. *Satz 3.31 und Beispiel 4.10 werden zeigen, dass im $\mathbb{R}^{n+1}$ jede n-dimensionale abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit orientierbar ist. Hier zeigen wir, dass folgende n–Differentialform auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat:*

$$\omega = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x_i dx_0\wedge\ldots\widehat{dx_i}\ldots\wedge dx_n.$$

Weil x^2 auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ konstant ist, gilt dort

$$\sum_{i=0}^{n} x_i dx_i = 0.$$

Für jedes $k = 0, \ldots, n$ gilt auf der offenen Teilmenge $U_k = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_k \neq 0\}$ von $\mathbb{S}^n$

$$dx_k = -\sum_{i \neq k} \frac{x_i}{x_k} dx_i.$$

Für $i \neq k$ können wir dx_k in $(-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n$ durch $-\frac{x_i}{x_k} dx_i$ ersetzen. Durch eine geeignete Permutation mit der Signatur $-(-1)^{k-i}$ erhalten wir

$$(-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n = (-1)^k \frac{x_i^2}{x_k} dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx_n.$$

Weil dies offenbar auch für $i = k$ gilt und wegen $x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ folgt auf U_k

$$\omega = (-1)^k \frac{1}{x_k} dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_k} \ldots \wedge dx_n = (-1)^k \frac{1}{x_k} p_k^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$$

mit $p_k : U_k \to \mathbb{R}^n$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots \widehat{x_k} \ldots, x_n)$. Wegen $x_k = \pm\sqrt{1 - p_k^2(x)}$ ist p_k ein lokaler Diffeomorphismus, also eine Immersion. Weil $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ auf $\mathbb{R}^n$ keine Nullstellen hat, hat ω_n auf $\mathbb{S}^n = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ keine Nullstellen und $\mathbb{S}^n$ ist orientierbar.

3.6 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auf einer orientierbaren n–dimensionalen Mannigfaltigkeit X jede stetige n–Differentialform ω über alle kompakten Teilmengen A von X integriert werden kann. Dafür geben wir an, wie wir dieses Integral lokal in einer Karte berechnen. Wir zeigen dann, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Karte abhängt. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins können wir zuletzt das Integral von ω über eine beliebige kompakte Teilmenge $A \subset X$ definieren.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen uns vor, dass A der Abschluss einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann beschränkt. Indem wir f außerhalb von A gleich Null setzen, erhalten wir eine Lebesque–integrable Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wenn der Rand ∂A von A, also die Schnittmenge von A mit dem Abschluss des Komplements von A, eine Nullmenge ist, dann ist nach dem Lebesgue–Kriterium die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ sogar Riemann–integrabel. Wenn wir uns im folgenden also auf solche kompakte Teilmengen A von X beschränkten, deren Ränder ∂A in allen Karten Nullmengen sind, dann können wir auch das Riemannintegral statt dem Lebesgueintegral benutzen. Im folgenden Satz rufen wir in Erinnerung, wie sich das Integral unter Koordinatentransformationen verhält.

Satz 3.19. *(Jacobis Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to V$ ein C^1–Diffeomorphismus von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_U f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_V f(y)dy_1 \ldots dy_n \quad \text{für alle} \quad f \in L^1(V).$$

Insbesondere gilt für eine kompakte Menge $A \subset U$ und ein $f \in C(\Phi[A], \mathbb{R}) \subset L^1(V)$

$$\int_A f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Phi[A]} f(y)dy_1 \ldots dy_n.$$

Korollar 3.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X. Sei A eine kompakte Teilmenge, die in den Definitionsbereichen U und V zweier Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von X enthalten ist. Dann gibt es zwei stetige Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\omega|_U = fd\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $\omega|_V = gd\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$. Und es gilt*

$$\int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi[U \cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\psi[U \cap V]$ auf $\phi[U \cap V]$, und es gilt $\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(f(x)))) > 0$ für alle $x \in U \cap V$. Außerdem gilt für $x \in U \cap V$

$$d\phi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\phi_n(x) = \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x)))) d\psi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\psi_n(x).$$
$$g(x) = f(x) \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))).$$

Seien jetzt $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{g} = g \circ \psi^{-1} : \psi[V] \to \mathbb{R}$. Dann gilt auf $\psi[U \cap V] : \tilde{f} \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \cdot \det((\phi \circ \psi^{-1})') = \tilde{g}$. Also folgt aus Jacobis Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\phi[A]} \tilde{f}(x)dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\psi[A]} \tilde{f}(\phi \circ \psi^{-1}(x)) \det((\phi \circ \psi^{-1})'(x))dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{\psi[A]} \tilde{g}(x)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n. \quad \textbf{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Mit diesem Korollar können wir das Integral einer n–Differentialform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 3.21. *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X und $A \subset X$ kompakt. Die Überdeckung der kompakten Menge A durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung und eine entsprechende Zerlegung der*

Eins $(h_m)_m$. Wegen der lokalen Endlichkeit verschwinden alle bis auf endlich viele der h_m's auf der kompakten Menge A. Für jedes m verschwindet h_m außerhalb einer kompakten Teilmenge $A_m \subset U_m$ des Definitionsbereiches einer Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{R}^n$. Auf U_m sei ω gleich $\omega = f_m d\phi_{m,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{m,n}$ mit stetigen $f_m : U_m \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\int_A \omega = \sum_m \int_{\phi_m[A \cap A_m]} h_m(\phi_m^{-1}(x)) f_m(\phi_m^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n.$$

Wegen dem vorangehenden Korollar hängt das Integral $\int_A \omega$ weder von der Wahl des orientierten Atlases noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab. Dieses Integral kann auch in Analogie zum uneigentlichen Riemannintegral auf nicht kompakte Teilmengen A von X ausgedehnt werden, wenn die entsprechenden Summen konvergieren.

Wenn wir die Orientierung von X umdrehen, dann wechselt das Integral $\int_A \omega$ das Vorzeichen, weil sich in allen Karten das Vorzeichen folgender Funktion f ändert:

$$\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Zum Abschluss können wir Jacobis Transformationsformel noch mal umformulieren:

Korollar 3.22. *Sei $f : X \to Y$ eine orientierungserhaltender C^1–Diffeomorphismus zwischen den orientierten Mannigfaltigkeiten X und Y der Dimension n. Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge und ω eine stetige n–Differentialform auf Y. Dann gilt*

$$\int_{f[A]} \omega = \int_A f^*\omega.$$ **q.e.d.**

Im Allgemeinen gilt dies nicht, wenn f nur eine Immersion zwischen zwei gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten und damit nicht notwendigerweise injektiv ist.

Beispiel 3.23. *Betrachte z.B. die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, die von der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ induziert wird mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung f ist zwar eine Immersion, und damit auch lokal ein Diffeomorphismus. Allerdings ist sie für $n > 1$ nicht injektiv. Es ist eine sogenannte Überlagerungsabbildung, d.h. die Urbilder von einzelnen Punkten bestehen jeweils aus n Punkten. Wir parametrisieren $\mathbb{S}^1$ durch $\phi \mapsto e^{\imath\phi}$. Dann ist $\omega = d\phi$ eine nichtverschwindende 1–Differentialform auf $\mathbb{S}^1$ und induziert wegen Satz 3.17 auf $\mathbb{S}^1$ eine Orientierung. Wegen $(e^{\imath\phi})^n = e^{n\imath\phi}$ entspricht die Abbildung f in dieser Parametrisierung der Abbildung $\phi \mapsto n\phi$. Also gilt $f^*d\phi = nd\phi$. Damit ist sie insbesondere orientierungserhaltend. Es gilt aber*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f^*\omega = \int_{\mathbb{S}^1} nd\phi = n\int_{\mathbb{S}^1} d\phi = n\int_{f[\mathbb{S}^1]} \omega.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch den Satz vom Igel.

Satz vom Igel 3.24. *Die n–dimensionale Sphähre $\mathbb{S}^n$ hat genau dann ein nichtverschwindendes glattes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch folgende Abbildungen beschrieben:

$$F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0.$$

Für ungerades n ist $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ eine solche Abbildung.

Sei jetzt n gerade und F eine solche glatte Abbildung ohne Nullstellen. Dann ist

$$f_\epsilon : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{1+\epsilon^2}\}, \qquad x \mapsto x + \epsilon\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

ebenfalls glatt. Wir zeigen jetzt, dass diese Abbildung mit einem geeigneten $\delta > 0$ für alle $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Dazu betrachten wir folgende n–Differentialform:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Im Beispiel 3.18 haben wir gezeigt, dass ω auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat. Weil ϵ in den Koordinaten von f_ϵ linear auftaucht, hat dann $f_\epsilon^*\omega$ folgende Gestalt

$$f_\epsilon^*\omega = \left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon^i g_i\right)\omega$$

mit glatten Funktionen $g_1, \ldots, g_{n+1}$ auf $\mathbb{S}^n$. Wegen der Kompaktheit von $\mathbb{S}^n$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass $f_\epsilon^*\omega$ auf $\mathbb{S}^n$ für $\epsilon < \delta$ keine Nullstellen hat. Daraus folgt, dass die Determinante der Jacobimatrix von f_ϵ auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat und f_ϵ eine Immersion ist. Wegen Satz 1.37 ist $f_\epsilon[\mathbb{S}^n]$ offen und als stetiges Bild einer kompakten Menge abgeschlossen. Weil $\mathbb{S}^n$ zusammenhängend ist, folgt die Surjektivität.

Zuletzt zeigen wir die Injektivität. Andernfalls gilt $f_\epsilon(x) = f_\epsilon(y)$ mit $x \neq y$, also

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} = -\frac{\epsilon}{\|x-y\|}\left(\frac{F(x)}{\|F(x)\|} - \frac{F(y)}{\|F(y)\|}\right).$$

Wegen dem Schrankensatz ist $F/\|F\|$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L, also f_ϵ für $\epsilon L < 1$ injektiv. Das zeigt, dass f_ϵ für ein $\delta > 0$ und alle $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Für die Abbildung $h_r : x \mapsto h_r(x) = rx$ gilt $h_r^*\omega = r^{n+1}\omega$. Aus Korollar 3.22 folgt

$$\int_{\mathbb{S}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \epsilon^i g_i\right)\omega = \int_{\mathbb{S}^n} f_\epsilon^*\omega = \int_{\mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \int_{\mathbb{S}^n} h_{\sqrt{1+\epsilon^2}}^*\omega = (\sqrt{1+\epsilon^2})^{n+1}\int_{\mathbb{S}^n} \omega.$$

Die linke Seite ist ein Polynom in ϵ aber die rechte Seite für gerade n nicht. **q.e.d.**

3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 3.25. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \qquad \text{und} \qquad \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n = 0\}.$$

Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^n$ heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ (stetig) differenzierbar, wenn f eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung auf eine in $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{H}^n$ offene Teilmenge $V \supset U$ besitzt (siehe Korollar 1.31)

In R. T. Seeley: "Extension of smooth functions defined in a half space" Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625-626 wird gezeigt, dass eine Funktion f auf $\mathbb{H}^n$ in diesem Sinne genau dann glatt ist, wenn f auf $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ glatt ist und sich alle partiellen Ableitungen von f stetig auf $\partial\mathbb{H}^n$ fortsetzen. Analoges gilt auch für p–mal stetig differenzierbare f.

Lemma 3.26. *Sei $\phi : U \to V$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^n$, und ϕ auf $U \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ und ϕ^{-1} auf $V \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ stetig differenzierbar mit sich stetig auf $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ bzw. $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ fortsetzenden Jacobimatrizen. Dann gilt*

$$\phi[U \cap \partial\mathbb{H}^n] = V \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $\phi(x) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$ für ein $x \in U \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ an. Sei $W \subset U$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x. Bei $y \in \phi[W] \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ ist die Jacobimatrix von ϕ^{-1} wegen der Kettenregel die inverse der Jacobimatrix von ϕ bei $\phi^{-1}(y)$. Wegen der Stetigkeit von den Jacobimatrizen, und weil solche y dicht in $\phi[W]$ liegen, gilt das auch für $y = \phi(x)$. Als Minimum von ϕ_n ist x ein kritischer Punkt von ϕ_n. Das widerspricht der Invertierbarkeit der Jacobimatrix von ϕ bei x. Also gilt $\phi^{-1}[V \cap \partial\mathbb{H}^n] \subset U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Das gleiche Argument für ϕ^{-1} zeigt die umgekehrte Inklusion. **q.e.d.**

Wegen dem Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 3.36 bilden sogar alle Homöomorphismen $\phi : U \to V$ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^{n+1}$ die Mengen $\phi[U \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}]$ und $V \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$ aufeinander ab. Wie in dem Beweis von dem Lemma genügt es zu zeigen, dass es keinen Homöomorphismus ϕ von einer offenen Teilmenge W in $\mathbb{R}^n$ auf eine in $\mathbb{H}^n$ offene Umgebung $\phi[W]$ eines Punktes in $\partial\mathbb{H}^n$ gibt. Wegen dem Gebietsinvarianzsatz ist dann $\phi[W]$ offen in $\mathbb{R}^n$, und damit nicht in $\mathbb{H}^n$ enthalten.

Definition 3.27. *Eine Karte einer Mannigfaltigkeit mit Rand X ist ein Homöomorphismus ϕ einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$.*

Zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ werde wieder verträglich genannt, wenn $\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi[U \cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\phi[U \cap V]$ nach $\psi[U \cap V]$ ist. Ein Atlas ist wieder eine Menge von verträglichen Karten, deren Definitionsbreiche X überdecken.

Definition 3.28. *Eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Rand ist ein Hausdorff– und Lindelöfraum zusammen mit einem Atlas von Karten nach $\mathbb{H}^n$. Die Menge aller Punkte, die die Karten nach $\partial\mathbb{H}$ abbilden heißt Rand ∂X.*

Beispiel 3.29. **(i)** *Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(ii) *Jedes abgeschlossene endliche Intervall ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemein gilt, dass alle Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Der Rand von offenen Intervallen ist leer.*

(iii) *Eine glatte Funktion f auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ohne Rand habe keine gemeinsamen Nullstellen mit df. Dann ist $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Insbesodnere sind alle abgeschlossenen Bälle $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand.*

(vi) *Offenbar sind für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{H}^{m+n}$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}^n$ diffeomorph. Wenn also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist und Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand, dann sind $X \times Y$ und $Y \times X$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Rand besteht jeweils aus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$ bzw. $\partial(Y \times X) = Y \times \partial X$.*

Satz 3.30. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:*

(i) *Der Rand ∂X ist in X eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ohne Rand.*

(ii) *Eine offene Umgebung U von ∂X in X ist diffeomorph zu der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand $U \simeq [0,1) \times \partial X$. Eine solche Umgebung heißt Kragen.*

(iii) *Wenn X orientierbar ist, dann ist auch ∂X orientierbar, und jede Orientierung von X induziert zusammen mit einem stetigen Vektorfeld N, dessen Einschränkung auf ∂X nach Innen (bzw. Außen) zeigt, eine Orientierung von ∂X.*

(iv) *Wenn X kompakt ist, dann ist auch ∂X kompakt.*

Beweis: (i) Der Rand erfüllt die Bedingung von Satz 1.45 und ist eine Untermannigfaltigkeit. Diese Untermannigfaltigkeit besitzt einen Atlas von Karten nach $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ und ist eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Jeder Punkt $x \in X \setminus \partial X$ im Komplement des Randes ist im Definitionsbereich einer Karte enthalten mit $\phi_n(x) > 0$. Dann gibt ist eine ganze Umgebung von x in $X \setminus \partial X$ enthalten. Also ist ∂X abgeschlossen.

(ii) Auf jeder Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X induziert wegen Satz 2.2 die Derivation $\frac{\partial}{\partial \phi_n}$ ein glattes Vektorfeld. Diese Vektorfelder können wir mit Hilfe einer Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem globalen glatten Vektorfeld N aufsummieren. Wir zeigen jetzt, dass die Einschränkung dieses Vektorfelds N auf den Rand ∂X überall nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Sei $x \in U \cap \partial X$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ eine zweite Karte von X um $x \in V$. Dann ist $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Funktion auf $\phi[U \cap V]$, die wegen Lemma 3.26 die Hyperebene $\partial \mathbb{H}^n$ auf sich selber abbildet. Also gilt:

$$\frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq n \\ > 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Koeffizient vor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ des Tangentialvektors $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) \in T_x X$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_n}(x) \frac{\partial}{\partial \psi_i}(x)$$

positiv ist, und deshalb $\frac{\partial}{\partial \phi_n}(x)$ auch bezüglich der Karte ψ nach Innen zeigt. Daraus folgt, dass bei $x \in \partial X$ auch der Koeffizient von $N(x) \in T_x X$ vor $\frac{\partial}{\partial \psi_n}(x)$ bezüglich jeder Karte ψ, deren Definitionsbereich x enthält, positiv ist. Damit zeigt $N(x)$ bezüglich jeder Karte nach Innen und hat auf ∂X keine Nullstellen. Wegen der lokalen Endlichkeit der Zerlegung der Eins $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der Definition 3.25 liegt jedes $x \in \partial X$ im Definitionsbereich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X, so dass sich im Bildbereich der Karte das Vektorfeld $T(\phi) \circ N \circ \phi^{-1}$ glatt auf eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $\phi[U]$ fortsetzt. Dann gibt es in ∂X eine offene Umgebung V von x und ein $\epsilon > 0$, so dass der Fluss ψ_N von dem Vektorfeld N auf $[0, \epsilon) \times V$ definiert ist. Wegen Satz 1.37 können wir V und ϵ so verkleiner, dass ψ_N auf ein Diffeomeorphismus von $[0, \epsilon) \times V$ auf eine offene Teilmenge von X ist. Mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins wird die Summe der Produkte mit den konstanten Funktionen ϵ auf den Umgebungen $U \cap \partial X$ zu einer glatten positiven Funktion ϵ auf ∂X. Weil die glatte Abbildung $(t, x) \mapsto (t\epsilon(x), x)$ die Umkehrabbildung Dann $(t, x) \mapsto (t/\epsilon(x), x)$ hat, ist die Abbildung

$$[0, 1) \times \partial X \to X, \quad (t, x) \mapsto \psi_N(\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand auf eine offene Teilmenge von X, die damit ein Kragen ist.

(iii) Wegen (ii) gibt es auf X ein glattes Vektorfeld N, das überall auf ∂X nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Wir können annehmen, dass X zusammenhängend und n–dimensional ist. Wegen Satz 3.17 sind die Orientierungen von X bestimmt durch nicht verschwindende stetige n–Differentialformen ω. Auf dem Rand verschwindet $d\phi_n$. Deshalb ist die Einschränkung von $i_N \omega$ auf den Rand gleich

$$i_N(\omega) = i_N(f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^{n-1} \langle d\phi_n, N \rangle f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$$

mit einer positiven Funktion f auf dem Definitionsbereich $U \ni x$ der Karte ϕ. Wegen $\langle d\phi_n, N\rangle > 0$ induziert jede Orientierung von X durch N eine Orientierung auf ∂X.

(iv) ∂X ist wegen (i) als abgeschlossene Teilmenge von X auch kompakt. **q.e.d.**

Im Beispiel 4.10 (i) werden wir sehen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Vektorraumbündel trivial sind. Wegen dem nächsten Satz sind dann alle $(n-1)$–dimensionalen abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten vom $\mathbb{R}^n$ orientierbar. Insbesondere ist $\mathbb{S}^{n-1}$ orientierbar. Nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten können aber in den $\mathbb{R}^n$ immersiert werden.

Satz 3.31.* *Sei Y eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der alle reellen Linienbündel trivial sind. Dann ist Y und jede abgeschlossenen $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit X orientierbar.*

Beweis*: Wegen Satz 3.17 (iii) ist Y genau dann orientierbar, wenn das reelle Linienbündel $\bigwedge^n Y$ trivial ist. Also ist Y orientierbar. Sei X eine abgschlossene Untermannigfaltigkeit von Y. Wegen Satz 1.45 besitzt X eine Überdeckung $\mathcal{U}$ durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ so dass $X \cap U$ die Nullstellenmenge der glatten Funktion $f_U = \phi_n$ ist. Wenn $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine andere solche Karte ist, dann verschwindet $\psi_n \circ \phi$ auf $\phi[U \cap V \cap X]$, aber $\frac{\partial(\psi_n\circ\phi^{-1})}{\partial\phi_j} = 0$ nur für $j \neq n$. Wegen

$$\psi_n \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi_n \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, tx_n)dt = x_n \int_0^1 \frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial\phi_n}(x_1, \ldots, tx_n)dt$$

ist dann $\psi_n/\phi_n = f_V/f_U$ auf $U \cap V$ eine glatte Funktion $g_{V,U}$ ohne Nullstellen. Wir ergänzen $\mathcal{U}$ durch die offene Menge $Y \setminus X$ zu einer offenen Überdeckung von Y und definieren die entsprechende Funktion $f_{Y\setminus X} = 1$. Die Funktionen $g_{V,U} = f_V/f_U$ definieren einen Kozykel und damit wegen Satz 1.52 ein reelles Linienbündel auf Y. Wegen Lemma 1.58 ist dieses Linienbündel genau dann trivial, wenn es einen globalen nichtverschwindenden Schnitt gibt. Ein solcher Schnitt definiert für alle $U \in \mathcal{U}$ auf den lokalen Trivialisierungen $U \times \mathbb{R}$ eine glatte Funktion $h_U : U \to \mathbb{R}$ ohne Nullstellen, so dass $h_V = g_{V,U}h_U$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$ auf $U \cap V$ gilt. Dann definiert $f_U/h_U = f_V/h_V$ eine globale glatte Funktion f auf Y, deren Nullstellenmenge X ist. Außerdem hat df keine gemeinsame Nullstellen mit f. Also ist $Z = \{y \in Y \mid f(y) \geq 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von Y mit Rand X. Als Untermannigfaltigkeit von Y der Dimension n ist Z orientierbar und dann wegen dem vorangehenden Satz (iii) X orientierbar. **q.e.d.**

3.8 Der Satz von Stokes

Satz 3.32. *Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n+1$. Sei ω eine stetig differenzierbare n–Differentialform auf X. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Hierbei hat ∂X die durch die Orientierung von X und ein nach **Außen** *zeigendes Vektorfeld N (vergleiche Satz 3.30 (iii)) induzierte Orientierung.*

Beweis: Wir überdecken X durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins zerfällt ω in eine Summe von stetig differenzierbaren n–Differentialformen, die jeweils außerhalb einer kompakten Teilmenge A eines Definitionsbereiches U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ verschwinden. Wegen der lokalen Endlichkeit und der Kompaktheit von X sind das nur endlich viele Summanden. Dann genügt es die Aussage für solche ω zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(A) Der Definitionsbereich U der Karte enthält keine Randpunkte. Dann ist $\phi[U] \subset \mathbb{H}^{n+1}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ und der Satz von Stokes besagt

$$\int_X d\omega = \int_A d\omega = 0.$$

Auf U können wir die n–Differentialform folgendermaßen schreiben:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i d\phi_0 \wedge \ldots \widehat{d\phi}_i \ldots \wedge d\phi_n$$

Hierbei bedeutet $\widehat{\cdot}$ wieder, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dann gilt

$$d\omega = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_i \wedge d\phi_0 \wedge \ldots \widehat{d\phi}_i \ldots \wedge d\phi_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt dann

$$\int_A d\omega = \int_{\phi[A]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i}(\phi^{-1}(x)) dx_0 \ldots dx_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\phi[A]} \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ sind auf $\phi[U]$ stetig differenzierbar und verschwinden außerhalb von A. Mit dem Wert 0 auf $\mathbb{H}^n \setminus \phi[U]$ setzt sich $f \circ \phi^{-1}$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{H}^{n+1}$ fort. Der Quader $Q = [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{H}^N$ enthalte $\phi[U]$:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Das ist ein mehrfaches Integral über die Intervalle $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n]$, deren Reihenfolge wir wegen dem Satz von Fubini vertauschen können: Wenn wir im i–ten Summanden

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n$$

die Integration über die Variable dx_i zuerst ausführen, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Differenz von $f_i \circ \phi^{-1}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen. Weil f_i außerhalb von A verschwindet, sind diese Werte gleich Null:

$$\int_A d\omega = 0.$$

(B) Der Definitionsbereich U der Karte enthält Randpunkte. In diesem Fall verfahren wir genauso wie in Fall (A), nur dass eine Randseite des Quaders Q auf den Rand von $\mathbb{H}^{n+1}$ liegt, also a_n verschwindet. Weil die Normale N nach Außen zeigt, gilt $\langle d\phi_n, N\rangle < 0$ auf dem Rand. Wegen Satz 3.12 (vi) gilt dann auf dem Rand

$$i_N(d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle d\phi_n, N\rangle d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Also entspricht die auf dem Rand induzierte Orientierung der n–Differentialform

$$-(-1)^n d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Für $i = 0, \ldots, n-1$ verschwinden $f_i \circ \phi^{-1}$ auf $\partial[a_i, b_i]$ und es gilt wie im Fall (A)

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n = 0.$$

Für $i = n$ verschwindet $f_n \circ \phi^{-1}$ nur an der Grenze b_n. Dann gilt

$$(-1)^n \int_Q \frac{\partial(f_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_n} dx_0 \ldots dx_n = -(-1)^n \int_{Q \cap \partial \mathbb{H}^{n+1}} f_n \circ \phi^{-1} dx_0 \ldots dx_{n-1}.$$

Weil auf $U \cap \partial X$ die 1–Form $d\phi_n$ verschwindet gilt dort $\omega|_{U \cap \partial X} = f_n d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$. Weil das Vorzeichen $-(-1)^n$ mit dem Vorzeichen der Orientierung übereinstimmt, gilt

$$\int_A d\omega = \int_{\partial X \cap A} \omega.$$

q.e.d.

Dieser Satz gilt genauso für stetig differenzierbare n–Differentialformen ω mit kompaktem Träger auf nicht kompakten $n+1$–dimensionalen Mannigfaltigkeiten X mit Rand. Allgemein kann man ihn auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern, wenn man sicherstellt, dass die entsprechenden Integrale konvergieren.

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir mithilfe das Satzes von Stokes ein Lemma, aus dem der Fixpunktsatz und der Gebietsinvarianzsatz von Brouwer folgen.

Lemma 3.33. *Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, die $\overline{B(0,1)}$ enthält, gibt es keine glatte Abbildung nach $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Einschränkung auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ist.*

Beweis: Für jede solche Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ folgt aus $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 1$ zuerst $f_1 df_1 + \ldots + f_n df_n = 0$, und dann, weil für alle $x \in U$ mindestens eine Komponente $f_i(x)$ nicht verschwindet, auch $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n =$

$$= df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i-1} \wedge \frac{-f_1 df_1 - \cdots - \widehat{f_i df_i} \cdots - f_n df_n}{f_i} \wedge df_{i+1} \wedge \ldots \wedge df_n = 0.$$

Weil $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt, widerspricht das dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{B(0,1)} df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \int\limits_{B(0,1)} d(f_1 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f_1 df_1 \wedge \ldots \wedge df_n \\ &= \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{B(0,1)} d(x_1 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int\limits_{B(0,1)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \neq 0. \quad \textbf{q.e.d.} \end{aligned}$$

Fixpunktsatz von Brouwer 3.34. *Jede stetige Abbildung f von dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ auf sich selber hat einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung ohne Fixpunkt. Sei $\epsilon \leq \|f(0)\| \leq 1$ das Minimum von $x \mapsto \|x - f(x)\|$ auf $\overline{B(0,1)}$. Wegen dem Satz von Stone–Weierstraß gibt es

$$p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{mit} \quad \|f(x) - p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{4} \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{B(0,1)}.$$

Wegen $\frac{2}{2+\epsilon}(1 + \frac{\epsilon}{4}) = 1 - \frac{\epsilon}{4+2\epsilon} \leq 1 - \frac{\epsilon}{6}$ liegt das Bild $g[\overline{B(0,1)}]$ von $g(x) = \frac{2}{2+\epsilon} p(x)$ in $\overline{B(0, 1 - \frac{\epsilon}{6})}$. Weil g auf $\overline{B(0, 1+\epsilon)}$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $1 < r \leq 1 + \epsilon$, so dass auch das Bild $g[B(0,r)]$ in $B(0,1)$ liegt. Dann gilt auf $\overline{B(0,1)}$

$$\begin{aligned} \|x - g(x)\| &= \left\|x - f(x) + f(x) - p(x) + \tfrac{\epsilon}{2+\epsilon} p(x)\right\| \\ &\geq \|x - f(x)\| - \|f(x) - p(x)\| - \tfrac{\epsilon}{2}\|g(x)\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Also hat g auf $\overline{B(0,1)}$ und wegen $g[B(0,r)] \subset B(0,1)$ sogar auf $B(0,r)$ keinen Fixpunkt. Die Abbildung h, die jedes $x \in B(0,r)$ auf den eindeutigen Schnittpunkt von der Geraden durch x und $g(x)$ mit $\mathbb{S}^{n-1}$ abbildet, der auf der gleichen Seite von $g(x) \in B(0,1)$ wie x liegt, gibt es wegen Lemma 3.33 nicht, also auch kein solches f. **q.e.d.**

Wir beweisen noch mit einem auf Hausdorff zurückgehenden Spezialfalls des Fortsetzungssatzes von Tietzsche den Gebietsinvarianzsatz von Brouwer.

Lemma 3.35 (Hausdorff)**.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer abschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raums X stetig und beschränkt, und $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$ für alle $x \in X$. Dann läßt sich f folgendermaßen stetig und beschränkt auf X fortsetzen:*

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ \inf\limits_{a\in A} \left(f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \right) & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Beweis: Weil A abgschlossen ist, ist jedes $x \in X \setminus A$ in einem Ball $B(x, \epsilon) \subset X \setminus A$ enthalten und $d(x, A) \geq \epsilon > 0$. Weil $d(x, a) \geq d(x, A)$ für alle $a \in A$ gilt, ist $g(x) \geq \inf_{a\in A} f(a)$. Also ist g wohldefiniert. Andereseits gibt es für jedes $x \in X \setminus A$ und $\epsilon > 0$ ein Element $b_x \in A$ mit $d(x, b_x) < d(x, A)(1 + \epsilon)$. Dann folgt $g(x) < f(b_x) + \epsilon$ und $g(x) \leq \sup_{a\in A} f(a)$, weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt. Also ist g beschränkt.

Als nächstes zeigen wir die Stetigkeit von g bei $x \in A$. Mit f ist auch $g|_A$ stetig. Für jedes $y \in X \setminus A$ und $\epsilon > 0$ gibt es neben $b_y \in A$ noch ein Element $a_y \in A$ mit

$$f(a_y) + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} - 1 - \epsilon < g(y) < f(b_y) + \epsilon.$$

Wegen $d(y, a_y) \geq d(y, A)$ liegt dann $g(y)$ in $(f(a_y) - \epsilon, f(b_y) + \epsilon)$. Für $d(y, a_y)$ folgt

$$\frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} < f(b_y) - f(a_y) + 1 + 2\epsilon \leq M + 1 + 2\epsilon \text{ mit } M = \sup_{a\in A} f(a) - \inf_{a\in A} f(a) \text{ und}$$
$$d(x, a_y) \leq d(x, y) + d(y, a_y) < d(x, y) + (M + 1 + 2\epsilon)d(y, A) \leq (M + 2 + 2\epsilon)d(x, y).$$

Genauso folgt $d(x, b_y) \leq d(x, y) + d(y, b_y) < d(x, y) + (1 + \epsilon)d(y, A) \leq (2 + \epsilon)d(x, y)$ aus der Wahl von b_y, so dass $f(a_y)$ und $f(b_y)$ wegen der Stetigkeit von f beliebig nahe bei $f(x)$ liegen, wenn $d(x, y)$ hinreichend klein ist. Also ist g bei $x \in A$ stetig.

Für $x, y \in X\setminus A$ und $\epsilon > 0$ folgt aus dem gezeigten für die entsprechenden $a_x, a_y \in A$:

$$f(a_x) + \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - 1 - \epsilon < g(x) \leq f(a_y) + \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - 1, \quad \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} < M + 1 + 2\epsilon,$$
$$f(a_y) + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} - 1 - \epsilon < g(y) \leq f(a_x) + \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} - 1, \quad \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} < M + 1 + 2\epsilon,$$
$$|g(x) - g(y)| < \left| \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} \right| + \left| \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \right| + \epsilon.$$

Mit $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(y, x)$ für $a \in A$ ist dann g bei $x \in X \setminus A$ stetig, wegen

$$\left| \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} \right| \leq \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} \frac{|d(y, A) - d(x, A)|}{d(y, A)} + \frac{|d(x, a_x) - d(y, a_x)|}{d(y, A)},$$
$$\left| \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \right| \leq \frac{|d(x, a_y) - d(y, a_y)|}{d(x, A)} + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \frac{|d(y, A) - d(x, A)|}{d(x, A)}. \qquad \textbf{q.e.d.}$$

Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 3.36. *Das Bild $f[U]$ einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen.*

Beweis: Um jedes $x \in U$ ist für ein $r > 0$ der abgeschlossener Ball $\overline{B(x,r)}$ von $\mathbb{R}^n$ in U enthalten. Deshalb genügt es für eine stetige injektive Abbildung $f : \overline{B(x,r)} \to \mathbb{R}^n$ zu zeigen, dass $B(f(x),\epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in $f[\overline{B(x,r)}]$ liegt. Weil alle abgeschlossenen Bälle homöomorph sind, genügt es eine stetige injektive Abbildung auf $B = \overline{B(0,1)}$ zu betrachten. Weil das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von B kompakt ist, ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f[B] \to B$ stetig und $A = f[B]$ kompakt. Wegen Lemma 3.35 gibt es eine stetige Fortseztung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f^{-1}. Wegen $g(f(0)) = 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $\|g(y)\| < \frac{1}{3}$ auf $y \in B(f(0), 2\epsilon)$ gilt. Wir zeigen jetzt $B(f(0),\epsilon) \subset A$. Andernfalls sei $z \in B(f(0),\epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Dann liegt $f(0)$ in $B(z,\epsilon) \cap A$ und damit außerhalb der beiden folgenden kompakten Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$:

$$C = \{y \in A \mid \|y - z\| \geq \epsilon\} \supset f[B \setminus B(0, \tfrac{1}{3})], \qquad D = \partial B(z,\epsilon).$$

Also hat g auf C keine Nullstellen. Sei $\delta = \min\{\|g(y)\| \mid y \in C\} \cup \{\frac{1}{3}\} > 0$. Wegen $z \notin A$ bildet die folgende stetige Abbildung $y \in C$ auf y und $A \setminus C$ nach $D \subset B(f(0), 2\epsilon)$ ab:

$$h : A \to C \cup D, \qquad y \mapsto z + (y - z) \max\left\{1, \frac{\epsilon}{\|y - z\|}\right\}.$$

Wegen dem Satz von Stone–Weierstraß gibt es Polynome

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in \big(\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]\big)^n \quad \text{mit} \quad \|p(y) - g(y)\| < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{für alle} \quad y \in C \cup D.$$

Für alle $q \in B(0, \frac{\delta}{2}) \subset \mathbb{R}^n$ hat dann $p - q$ auf C keine Nullstellen. Weil p auf $B(z, 2\epsilon)$ lipschitzstetig ist, ist $p[D]$ genauso wie D eine Nullmenge des $\mathbb{R}^n$. Für $q \in B(0, \frac{\delta}{2}) \setminus p[D]$ hat dann $p \circ h - q$ auf A keine Nullstellen und erfüllt auf $y \in C$

$$\|g(y) - p(h(y)) + q\| \leq \|g(y) - p(y)\| + \|q\| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} \leq \tfrac{1}{3}.$$

Auf $y \in A \setminus C$ liegen $y, h(y) \in B(f(0), 2\epsilon)$ und $g(y), g(h(y)) \in B(0, \frac{1}{3})$. Also folgt

$$\begin{aligned}\|g(y) - p(h(y)) + q\| &\leq \|g(y) - g(h(y)) + g(h(y)) - p(h(y)) + q\| \\ &\leq \|g(y)\| + \|g(h(y))\| + \|p(h(y) - g(h(y))\| + \|q\| < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} \leq 1.\end{aligned}$$

Wegen dem Fixpunktsatz von Brouwer hat dann folgende Abbildung einen Fixpunkt

$$\overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}, \qquad x \mapsto x - p(h(f(x))) + q = g(f(x)) - p(h(f(x))) + q$$

Also hat $p \circ h - q$ auf A eine Nullstelle im Widerspruch zu $B(f(0),\epsilon) \not\subset A$. **q.e.d.**

Kapitel 4

Einführung in die Differentialtopologie

Dieser Abschnitt enthält eine kleine Einfürung in die sogenannte Differentialtopologie. Das ist die Theorie der qualitativen Aspekte von differenzierbaren Abbildungen (vgl. J.W.Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint", Princeton Univ. Press).

4.1 Der Satz von Sard

Satz von Sard 4.1. *Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Bild $f[C]$ der Menge $C = \{x \in U \mid \operatorname{Rang} T_x(f) < n\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$.*

Beweis: Für $n = 0$ ist $C = \emptyset$ und die Aussage gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir die Aussage mit vollständiger Induktion in $m \in \mathbb{N}_0$. Für $m = 0$ enthält C einen Punkt und die Aussage gilt. Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für $m - 1 \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Für $m \geq n$ betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge C_k aller Punkte, so dass alle partiellen Ableitungen höchstens k–ter Ordnung verschwinden. Diese Mengen sind ineinander enthalten: $C \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots$. Wir zeigen, dass erstens $f[C \setminus C_1]$, zweitens $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und drittens $f[C_k]$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ Nullmengen sind. Dann ist auch $f[C] = f[C \setminus C_1] \cup f[C_1 \setminus C_2] \cup \ldots \cup f[C_{k-1} \setminus C_k] \cup f[C_k]$ eine Nullmenge. Für $m < n$ ist $C = U$ und aus dem dritten Schritt folgt für $k = 0$ die Aussage.

1. Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und $C \setminus C_1 = \emptyset$. Für $n > 1$ zeigen wir zuerst, dass jedes $y \in C \setminus C_1$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ enthält, so dass $f[V \cap (C \setminus C_1)]$ eine Nullmenge ist. Wegen $y \notin C_1$ ist mindestens eine erste partielle Ableitung von f bei y ungleich Null. Nach vertauschen der Komponenten können wir $\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} \neq 0$ annehmen. Dann hat $h : U \to \mathbb{R}^m$, mit $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_m)$ bei y eine invertierbare Ableitung und bildet wegen dem Satz der inversen Funktion eine offene Umgebung $V \subset U$ von y mit einem Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Sei $g = f \circ h^{-1}$. Die Punkte $x \in V'$ mit $\mathrm{Rang}(T_x(g)) < n$ sind dann genau $C' = h[V \cap C]$, und $f[V \cap C] = g[C']$. Aufgrund der Definition von h und g bildet g die Hyperebene $H_t = \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, für das diese Hyperbene nicht leer ist, nach $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei $g_t : H_t \to \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ die Einschränkung von g auf H_t. Auf V' dividiert $T(h^{-1})$ den Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ und $T(g)$ bildet ihn auf einen Vektor ab, dessen erster Eintrag nicht Null ist. Dann hat $T(g_t)$ bei $x \in H_t$ genau dann einen Rang $< n - 1$, wenn dort $T(g)$ einen Rang $< n$ hat, also wenn $h^{-1}(x)$ in C liegt. Nach Induktionsvorausetzung ist das Bild $g_t[H_t \cap C']$ für alle diese Hyperebenen eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Weil C' als abgeschlossene Teilmenge von V' eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist, ist auch $g[C']$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und damit messbar. Dann folgt aus dem Satz von Fubini, dass $g[C'] = f[V \cap C]$ eine Nullmenge ist. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C \setminus C_1$, deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C \setminus C_1]$ eine Nullmenge.

2. Für $y \in C_k \setminus C_{k+1}$ ist mindestens eine $(k+1)$–te partielle Ableitung ungleich 0. Nach Vertauschen der Komponenten können wir annehmen, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ der Ordnung $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ und ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ die Funktion $w(x) = \partial^\alpha f_r(x)$ bei y verschwindet, aber $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ nicht. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet $x \mapsto h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_m)$ mit einem Diffeomorphismus eine offenen Umgebung $V \subset U$ von y auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Weil auf C_k alle k–ten partiellen Ableitungen verschwinden, bildet sie $C_k \cap V$ auf die Hyperebene $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ ab. Die Einschränkung $g|_H$ der Abbildung $g = f \circ h^{-1}$ auf H bildet laut Induktionsvorausetzung alle Punkte $x \in H \cap V'$, an denen der Rang von $T(g|_H)$ kleiner als n ist, auf eine Nullmenge ab. Alle Punkte von $h[C_k \cap V]$ sind in dieser Menge enthalten. Deshalb ist $g|_H[h[C_k \cap V]] = f[C_k \cap V]$ eine Nullmenge. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C_k \setminus C_{k+1}$ deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ eine Nullmenge.

3. Wir zeigen dass $f[C_k]$ in $\mathbb{R}^n$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ eine Nullmenge ist. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von $\mathbb{R}^m$ und $Q = \overline{B(x, r)} \subset U$ ein abgeschlossener Ball bezüglich dieser Norm, also ein Quader mit den Kantenlängen $2r$. Weil f $(k+1)$–mal stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Restgliedabschätzung im Satz von Taylor und der Kompaktheit von Q ein $c > 0$ mit

$$\|f(x+h) - f(x)\|_\infty \leq c\|h\|_\infty^{k+1} \qquad \text{für alle } x \in C_k \cap Q \text{ und } x + h \in Q.$$

Wir unterteilen Q in l^m Quader mit Kantenlängen $\frac{2r}{l}$. Sei $\tilde{Q}$ ein solcher Quader, der ein $x \in C_k$ enthält. Dann gilt $\|h\|_\infty \leq \frac{2r}{l}$ für jeden Punkt $x + h \in \tilde{Q}$. Mit der obigen

Abschätzung folgt, dass $f[\tilde{Q}]$ in einem abgeschlossenen Ball bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit dem Radius $c(\frac{2r}{l})^{k+1}$ enthalten ist, also höchstens das Volumen $(2c)^n(\frac{2r}{l})^{(k+1)n}$ hat. Dann hat $f[C_k \cap Q]$ höchstens das l^m fache Volumen $2^{n(k+2)}c^n r^{n(k+1)} l^{m-(k+1)n}$. Wegen $k+1 > \frac{m}{n}$ konvergiert diese obere Schranke im Grenzwert $l \to \infty$ gegen Null.

Im Fall $m < n$ und $C = U$ ist $f[U]$ wegen **3.** eine Nullmenge. **q.e.d.**

Die Aussage dieses Satzes gilt auch für $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$ mit $l > \max\{0, m-n\}$. Um das zu zeigen muss im zweiten Schritt $g = f \circ h^{-1}$ auf H die Induktionsvorraussetzungen erfüllen. Dafür benötigt man ein weiteres Argument und die stärkere Bedingung $l > \max\{0, m-n\}$ anstatt der Bedingung $l \geq \frac{m}{n}$ aus dem dritten Schritt.

Korollar 4.2 (A.B. Brown)**.** *Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X$ mit $\operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$ eine überall dichte (mit keiner offenen nichtleeren Menge schnittfremde) Teilmenge von Y.*

Beweis: Weil jede offene Teilmenge einen offenen Ball enthält, hat sie auch positives Volumen. Wegen dem Satz von Sard enthält dann jede offene Teilmenge von Y Punkte aus diesem Komplement. Damit ist das Komplement überall dicht. **q.e.d.**

Lemma 4.3. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $\dim X \geq \dim Y$. Für reguläre Werte y von f, d.h.*

$$y \in f[X] \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang} T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\},$$

ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine $\dim X - \dim Y$–dimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Für $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ist $T_x f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$.

Beweis: Auf $f^{-1}[\{y\}]$ gilt $\operatorname{Rang} T(f) = \dim Y$. Wegen Satz 1.44 ist $\operatorname{Rang} T(f)$ auf einer Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ konstant. Dann ist $T_x(f)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ surjektiv und die Aussagen folgen aus Korollar 1.46. **q.e.d.**

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern.

Korollar 4.4. *Sei $f : X \to Y$ eine glatte Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y ohne Rand mit $\dim X > \dim Y$. Für reguläre Werte y von f, die auch reguläre Werte von $f|_{\partial X}$ sind, ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}] \cap \partial X$.*

Beweis: Die Aussage folgt aus der Anwendung von Lemma 4.3 auf f und $f|_{\partial X}$.**q.e.d.**

Satz 4.5. *Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit X mit oder ohne Rand ist diffeomorph zu einem Intervall (d.h. $(0,1)$, $[0,1)$ oder $[0,1]$) oder $\mathbb{S}^1$.*

Beweis: Sei X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wählen einen Atlas von Karten mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Jede Funktion f_m verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches U_m der Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{H}^1 = [0,\infty)$. Wir definieren eine Abbildung $g : TX \to [0,\infty)$ durch

$$g(v) = \sum_{\{m|x\in U_m\}} |f_m(x)d\phi_m(v)| \quad \text{für alle} \quad v \in T_xX.$$

Insbesondere ist $g^{-1}[\{0\}]$ der Nullschnitt von TX und g außerhalb des Nullschnittes glatt. Für alle $x \in X$ gibt es genau zwei $v \in T_xX$ mit $g(v) = 1$, die auseinander durch Multiplikation mit -1 hervorgehen. Jedes solche v setzt sich auf einer Umgebung von x eindeutig zu einem glatten Vektorfeld nach $g^{-1}[\{1\}]$ fort. Die Integralkurven dieser lokalen Vektorfeldern sind Immersionen $\phi : I \to X$ auf Intervallen mit

$$g(T_t(\phi)(1)) = 1 \quad \text{für alle} \quad t \in I \quad \text{und} \quad 1 \in T_tI \simeq \mathbb{R}.$$

Damit das Bild von ϕ auch Randpunkte von X enthalten kann, lassen wir Intervalle I mit Rand zu. Dann gibt es wegen Satz 2.5 für jedes $x \in X$ eine solche Integralkurve $\phi : I \to X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi^{-1}[\partial X] \subset \partial I$. Weil die Vektorfelder nach $g^{-1}[\{1\}]$ bis auf ein Vorzeichen eindeutig sind, erüllen zwei Integralkurven $\phi_2 : I_2 \to X$ von solchen Vektorfeldern mit $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ immer eine der beiden folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t + t_1) &= \phi_2(t + t_2) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap I_2 - t_2 \\ \phi_1(t + t_1) &= \phi_2(t_2 - t) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap t_2 - I_2. \end{aligned}$$

Dann überträgt sich auch der Satz 2.7 und es gibt für jedes x ein maximales $\phi : I \to X$ mit $\phi(0) = x$, so dass alle anderen solchen $\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$ Einschränkungen von ϕ auf ein Teilintervall von I, oder Einschränkungen von $t \mapsto \phi(-t)$ auf ein Teilintervall von $-I$ sind. Wenn ϕ einen Randpunkt von I nach $X \setminus \partial X$ abbildet, dann läßt sich ϕ über den Randpunkt von I hinaus fortsetzten. Deshalb bilden maximale ϕ Randpunkte von I auf Randpunkte von X ab. Insbesondere ist das Bild eines maximalen ϕ in X offen. Wenn $\phi(t_k)$ für eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich I eines maximalen ϕ gegen $x \in X$ konvergiert, dann existiert ein solches $\tilde{\phi} : \tilde{I} \to X$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$. Das Bild $\tilde{\phi}[\tilde{I}]$ ist eine Umgebung von x und enthält unendlich viele $\phi(t_k)$. Damit läßt sich ϕ so fortsetzten, dass $\phi[I]$ x enthält. Also ist $\phi[I]$ auch abgeschlossen. Wenn X zusammenhängend ist, ist ϕ surjektiv. Wenn $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ gilt, dann folgt entweder $\phi(t+t_1) = \phi(t_2-t)$ oder $\phi(t + t_1) = \phi(t + t_2)$. Im ersten Fall folgt mit $t = \frac{t_2-t_1}{2} + \epsilon$

$$\phi\left(\tfrac{t_1+t_2}{2} + \epsilon\right) = \phi\left(\tfrac{t_1+t_2}{2} - \epsilon\right) \quad \text{für } |\epsilon| \leq \tfrac{t_2-t_1}{2}.$$

Da ϕ eine Immersion ist wiederspricht das der lokalen Injektivität von ϕ bei $\frac{t_1+t_2}{2}$. Im zweiten Fall ist ϕ periodisch $\phi(t + \gamma) = \phi(t)$ mit Periode $\gamma = t_2 - t_1$. Weil ϕ als

Immersion lokal injektiv ist, gibt es eine kleinste positive Periode $\gamma_{\min}$ von ϕ. Also ist ϕ entweder ein Diffeomorphismus oder induziert einen von $\mathbb{R}/\gamma_{\min}\mathbb{Z}$ nach X. **q.e.d.**

Lemma 4.6 (Hirsch)**.** *Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X mit Rand gibt es keine glatte Abbildung $f : X \to \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung mit $f|_{\partial X} = \mathbb{1}_{\partial X}$. Wegen dem Satz von Sard gibt es ein $y \in \partial X$, so das $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = \{y\}$ ist. Das widerspricht Satz 4.5, wegen dem die kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand als disjunkten Vereinigungen von $\mathbb{S}^1$ und $[0,1]$ und eine gerade Anzahl an Randpunkten haben.**q.e.d.**

Im Beweis vom Fixpunktsatz von Brouwer 3.34 kann dieses Lemma das Lemma 3.33 ersetzen. Die Existenz der Einschränkung $h|_{\overline{B(0,1)}}$ der dort konstruierten glatten Abbildung $h : B(0,r) \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ widerspricht Lemma 4.6.

4.2 Der Grad glatter Abbildungen

Definition 4.7. *Zwei glatte Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen glatt homotop, wenn es eine glatte Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ gibt, mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Zwei solche Diffeomorphismen heißen glatt isotop, wenn $x \mapsto H(x,t)$ für alle $t \in [0,1]$ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist.*

Zuerst zeigen wir, dass die zurückgezogenen Vektorraumbündel sich unter einer Homotopie nicht ändern. Deshalb sind dann auf $\mathbb{R}^n$ alle Vektorraumbündel trivial.

Satz 4.8. *Sei (E, B, π) ein Vektorraumbündel. Für glatt homotope glatte Abbildungen $f, g : X \to B$ auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind f^*E und g^*E isomorph.*

Beweis: Sei $H : X \times [0,1] \to B$ eine glatte Homotopie von $f = H(\cdot, 0)$ nach $g = H(\cdot, 1)$. Dann ist H^*E ein Vektorraumbündel über $X \times [0,1]$ mit Projektion π. Es genügt offenbar zu zeigen, dass die beiden Vektorraumbündel $f^*E = \pi^{-1}[X \times \{0\}]$ und $g^*E = \pi^{-1}[X \times \{1\}]$ auf X isomorph sind. Weil $\{x\} \times [0,1]$ für jedes $x \in X$ eine kompakte Teilmenge von $X \times [0,1]$ ist, wird diese Menge von endlich viele kartesischen Produkten $U_j \times I_j$ von offenen Umgebungen von x mit offenen Teilintervallen I_j von $[0,1]$ überdeckt, auf denen H^*E durch glatte Abbildungen trivialisiert wird:

$$\begin{array}{ccccc} F_j \times U_j \times I_j & \xrightarrow{\phi_j} & \pi^{-1}[U_j \times I_j] & \hookrightarrow & H^*E \\ p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U_j \times I_j & \xrightarrow{\mathbb{1}_{U_j \times I_j}} & U_j \times I_j & \hookrightarrow & X \times [0,1] \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $p_2 \times p_3$ die Abbildung $(f, x, t) \mapsto (x, t)$ und die offenen Teilintervale I_j überdecken $[0, 1]$. Dann gibt es $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_J = 1$, so dass $[t_{j-1}, t_j]$ jeweils in I_j enthalten ist. Für jedes $j = 1, \ldots, J$, $x \in U_x = U_1 \cap \ldots \cap U_J$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ist $\phi_j(\cdot, x, t) \circ \phi_j^{-1}(\cdot, x, t_{j-1})$ ein Isomorphismus von der Faser $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ von H^*E über (x, t_{j-1}) auf die Faser $\pi^{-1}[\{(x, t)\}]$ über (x, t), der bei $t = t_{j-1}$ gleich $\mathbb{1}_{\pi^{-1}[\{(x,t_{j-1})\}]}$ ist. Wir definieren eine Abbildung ϕ_x auf $F_1 \times U_x \times [0, t_1]$ durch $\phi_1(\cdot, x, t) \circ \phi_1^{-1}(\cdot, x, 0)$ und induktiv in $j = 2, \ldots, J$ auf $F_1 \times U_x \times [t_{j-1}, t_j]$ durch

$$\phi_x(f, x, t) = \phi_j(\cdot, x, t) \circ \phi_j^{-1}(\cdot, x, t_{j-1})\big(\phi_x(f, x, t_{j-1})\big)$$

Weil diese Abbildungen auf $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ jeweils mit dem schon definierten ϕ_x übereistimmen, setzen sie sich mit $F_x = F_1$ zu einer glatten Trivialisierung

$$\begin{array}{ccccc} F_x \times U_x \times [0,1] & \xrightarrow{\phi_x} & \pi^{-1}[U_x \times [0,1]] & \hookrightarrow & H^*E \\ p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U_x \times [0,1] & \xrightarrow{\mathbb{1}_{U_x \times [0,1]}} & U_x \times [0,1] & \hookrightarrow & X \times [0,1] \end{array}$$

von H^*E auf $U_x \times [0, 1]$ zusammen. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_0 = 0$ eine glatte Zerlegung der Eins zu der Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ von X, U_n jeweils das Element der Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$, von dem $\overline{\{x \in X \mid h_n(x) \neq 0\}}$ eine kompakte Teilmenge ist, und ϕ_n die entsprechende Trivialisierung von H^*E auf $U_n \times [0, 1]$. Dann definiert $H_n = (\mathbb{1}_X \times (h_0 + \ldots + h_n))$: $X \to X \times [0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Diffeomorphismus von X auf ein Untermannigfaltigkeit von $X \times [0, 1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ unterscheiden sich jeweils H_{n-1} und H_n nur auf einer kompakten Teilmenge von U_n. Insbesondere unterscheiden sich die beiden Vektorraumbündel $(H \circ H_{n-1})^*E$ und $(H \circ H_n)^*E$ nur auf U_n. Für $x \in U_n$ definieren

$$\begin{aligned} &\phi_n(\cdot, H_n(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_{n-1}(x)) : \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}] \to \pi^{-1}[\{H_n(x)\}], \\ &\phi_n(\cdot, H_{n-1}(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_n(x)) : \pi^{-1}[\{H_n(x)\}] \to \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}] \end{aligned}$$

zu einander inversen Isomorphismen zwischen Fasern von H^*E, die für $x \in U_n$ mit $h_n(x) = 0$ gleich der Identität sind. Also sind $(H \circ H_{n-1})^*E$ und $(H \circ H_n)^*E$ für alle $n \in \mathbb{N}$ isomorph. Wegen der Eigenschaften der Zerlegung der Eins, induzieren diese Isomorphismen zwischen den Vektorraumbündeln $((H \circ H_n)^*E)_{n\in\mathbb{N}}$ im Grenzwert $n \to \infty$ einen Isomorphismus $f^*E = (H \circ H_0)^*E \simeq (H \circ \lim_{n\to\infty} H_n)^*E = g^*E$. **q.e.d.**

Aus diesem Satz und Beispiel 1.62 folgt sofort folgendes Korollar:

Korollar 4.9. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X heißt glatt zusammenziehbar, wenn $\mathbb{1}_X$ glatt homotop zu der konstanten Abbildung $X \to X$ auf ein $x_0 \in X$ ist. Auf solchen Mannigfaltigkeiten sind alle Vektorraumbündel trivial.* **q.e.d.**

Beispiel 4.10. **(i)** *Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V ist $V \times [0,1] \to V, (v,t) \mapsto (1-t)v$ eine glatte Homotopie von $\mathbb{1}_V$ auf die konstante Abbildung auf die Null. Also ist V zusammenziehbar und alle Vekorraumbündel auf V sind trivial.*
(ii) *Wegen dem Satz vom Igel 3.24 ist $T\mathbb{S}^{2n}$ nicht trivial und $\mathbb{S}^{2n}$ nicht zusammenziehbar.*

Beispiel 4.13 wird zeigen, dass alle kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand nicht zusammenziehbar sind.

Für eine glatte Abbildung $f : X \to Y$ zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Satz 1.37 eine diskrete Teilmenge von X, von der je zwei verschiedene Elemente disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn X kompakt ist, hat diese Menge also nur eine endliche Anzahl $\#f^{-1}[\{y\}]$ an Elementen. Wir zeigen jetzt

Satz 4.11. *Seien $f, g : X \to Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, wobei X kompakt ist, keinen Rand hat und mit Y die gleiche konstante Dimension hat. Wenn $y \in Y$ ein regulärer Wert sowohl von f als auch von g ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ eine gerade Zahl.*

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}]$ bis auf eine gerade Zahl unabhängig von der Wahl von $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$.

Beweis: Sei $F : X \times [0,1] \to Y$ eine glatte Homotopie zwischen f und g. Wenn y zusätzlich nicht zu $\{F(x,t) \mid (x,t) \in X \times [0,1] \text{ und } \operatorname{Rang}(T_x(F)) < \dim Y\}$ gehört, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $(f^{-1}[\{y\}] \times \{0\}) \cup (g^{-1}[\{y\}] \times \{1\})$. Wegen Satz 4.5 enthält dieser Rand eine gerade Anzahl an Punkten und $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ ist gerade.

Wegen der Voraussetzung an y und wegen dem Satz 1.44 und dem Satz der inversen Funktion sind die beiden Funktionen $z \mapsto \#f^{-1}[\{z\}]$ und $z \mapsto \#g^{-1}[\{z\}]$ auf einer kleinen Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard enthält diese Umgebung einen Punkt z in obiger Menge. Also gilt die erste Aussage. Für die zweite beutzen wir

Lemma 4.12. *Seien $y, z \in Y$ Punkte einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann bildet ein zu $\mathbb{1}_Y$ isotoper Diffeomorphismus von Y y auf z ab.*

Beweis: Für je zwei Punkte in $(0,1)$ gibt es eine streng monotone wachsende stückweise lineare Funktion, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ gleich $\mathbb{1}_{(0,1)}$ ist, und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Dann gibt es auch einen Diffeomorphismus ϕ von $\mathbb{R}$ auf sich selber, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ die identische Abbildung ist und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Die Abbildung $(x,t) \mapsto tx + (1-t)\phi(x)$ definiert dann eine glatte Isotopie von ϕ zu der Identität. Für jedes $z \in B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ liegt z für $\epsilon > 0$ mit $\|z\|(1+2\epsilon) < R$, $a = -\epsilon z$ und $r = R - \epsilon\|z\|$

und in $B(a,r) \subset B(0,R)$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto a + r\phi(\frac{\|x-a\|}{r})\frac{x-a}{\|x-a\|}$, die a auf a abbildet, ein Diffeomeorphismus von $B(0,R)$, der außerhalb einer kompakten Menge in $B(a,r) \subset \mathbb{R}^n$ gleich $\mathbb{1}_{B(a,r)}$ ist und isotop zu $\mathbb{1}_{B(0,R)}$ ist. Für ein geeignetes ϕ bildet sie 0 auf z ab. Für gegebenes y gilt die Aussage mit einem solchen Diffeomorphismus für alle z im Urbild eines Balles unter einer Karte, die y auf das Zentrum des Balles abbildet. Weil die Aussage transitiv ist, ist dann die Menge der Punkte z, so dass die Aussage für ein gegebenes y gilt, offen und abgeschlossen, und damit gleich Y. **q.e.d.**

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.11: Wegen dem Lemma gibt es für zwei Punkte $y, z \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ einen zu $\mathbb{1}_Y$ glatt isotopen Diffeomorphismus Φ von Y, der z auf y abbildet. Dann sind f und $g = \Phi \circ f$ glatt homotop mit $g^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$. Also folgt die zweite Aussage aus der ersten. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass $\deg_2(f) = \# f^{-1}[\{y\}] \mod 2$ unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist und eine Homotopieinvariante von solchen glatten Abbildungen $f : X \to Y$ definiert. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist die Anzahl für Werte y außerhalb des Bildes von f Null und damit $\deg_2(f) = 0 \mod 2$. Weil das Bild $f[X]$ immer kompakt ist, ist f nicht surjektiv wenn Y nicht kompakt ist, und $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

Beispiel 4.13. **(i)** *Jede konstante Abbildung* $f : X \to X$ *hat* $\deg_2(f) = 0 \mod 2$.

(ii) *Die Identität einer kompakten Mannigfaltigkeit* $\mathbb{1}_X$ *hat* $\deg_2(\mathbb{1}_X) = 1 \mod 2$.

(iii) *Für* $X = Y = \mathbb{S}^n$ *folgt Lemma 4.6 für* $X = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *und damit der Brouwerschen Fixpunktsatz 3.34, weil jede glatte Abbildung* $f : \overline{B(0,1)} \to \mathbb{S}^n$ *mit* $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *eine glatte Homotopie von* $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ *zu einer konstanten Abbildung definiert.*

Definition 4.14. *Für eine glatte Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* X *kompakt und* $\dim X = \dim Y$ *hängt das Vorzeichen von* $\det(T_x(f))$ *bei* $x \in X$ *nur von den Orientierungen von* X *und* Y *ab. Wir definieren*

$$\deg(f,y) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \frac{\det(T_x(f))}{|\det(T_x(f))|} \text{ für } y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \operatorname{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

Satz 4.15. *Seien* $f, g : X \to Y$ *glatt homotope glatte Abbildungen zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit* X *kompakt, ohne Rand und der gleichen konstanten Dimension wie* Y*. Wenn* $y \in Y$ *sowohl ein regulärer Wert von* f *als auch von* g *ist, dann gilt* $\deg(f,y) = \deg(g,y)$.

Wenn Y *zusammenhängend ist, dann ist* $\deg(f,y)$ *unabhängig von der Wahl des regulären Wertes* y *von* f.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ $\deg(f, y) = 0$ gilt, wenn X der Rand einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit Z ist und f sich zu einer glatten Abbildung $F : Z \to Y$ fortsetzt. Wenn $y \in Y$ zusätzlich nicht in $\{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ liegt, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine endliche Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von Z, deren Rand in $X = \partial Z$ liegt. Sei $A \subset F^{-1}[\{y\}]$ eine Zusammenhangskomponente mit nicht verschwindendem Rand $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Die Orientierungen von Z und Y induzieren die Orientierung von A, deren äußeres Produkt mit der durch F zurückgezogenen nicht verschwindenden Volumenform von Y positiv proportional zu der nichtverschwindenden Volumenform von Z ist. Wegen Satz 4.5 ist A als eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ein abgeschlossenes Intervall, und die Orientierung von A zeigt an einem Ende aus A heraus und an dem anderen Ende nach A hinein. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von $\det(T_a(f))$ und $\det(T_b(f))$ unterschiedlich sind, und deshalb $\deg(f, y)$ verschwindet. Für $y \in \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist die Funktionen $y' \mapsto \deg(f, y')$ wegen Satz 1.37 auf einer Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard gibt es in dieser Umgebung ein $y' \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \mathrm{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$. Daraus folgt $\deg(f, y) = 0$, wenn sich f zu einem $F : Z \to Y$ fortsetzt.

Wenn f und g glatt homotop sind, dann sind f und g die Randwerte von $F : X \times [0, 1] \to Y$ mit $\partial(X \times [0, 1]) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Weil beide Randwerte bezüglich der Orientierung von $X \times [0, 1]$ umgekehrtes Vorzeichen haben folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten wie im Beweis von Satz 4.11. **q.e.d.**

Aus Satz 4.15 folgt ein zweiter Beweis des Satzes vom Igel 3.24:

Beweis: Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch Abbildungen

$$F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0$$

beschrieben. Für ungerades n beschreibt $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ ein solches glattes nicht verschwindendes Vektorfeld. Für gerades n dreht die Antipodenabbildung die Orientierung des $\mathbb{R}^{n+1}$ um, und bildet die äußere Normale von $\overline{B(0, 1)}$ auf sich selber ab. Wegen Satz 3.30 (iii) hat sie den Grad -1 und ist wegen Satz 4.15 nicht glatt homotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$. Die Abbildung F zu einem glatten nichtverschwindenden Vektorfeld definiert aber folgende glatte Homotopie von $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu der Antipodenabbildung:

$$\mathbb{S}^n \times [0, 1] \to \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Für gerades n kann es also kein solches Vektorfeld F geben. **q.e.d.**