Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis III
Unused Exercises

15 June 2021

Here are some exercises from previous years that I didn't use this year. The ones about derivations might be good revision: I cut them from sheet 4 to spend more time on submanifolds because I knew we would cover this when we got to vector fields, but I would have liked to spend more time on this overall.

I'm not going to write solutions, but feel free to email me if you have questions or to check your solution.

101. SHEET 4: Der lokale Umkehrsatz.

Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung, und $p \in M$. Wir setzen voraus, dass die Tangentialabbildung $T_p(f) : T_pM \to T_{f(p)}N$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Man zeige dann, dass Umgebungen U von p in M und V von $f(p)$ in N existieren, so dass $f|_U : U \to V$ ein glatter Diffeomorphismus ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man führe die Behauptung auf den entsprechenden Satz der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ zurück.]

102. Über den Zusammenhang zwischen Derivationen und Tangentialvektoren.

Sei $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig. *Zeige*, dass die Abbildung $\Phi : \{p\} \times \mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n,\ (p, v) \mapsto D_v|_p$ mit

$$D_v|_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p + tv)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man begründe, weshalb Φ eine lineare Abbildung ist. Um die Injektivität zu zeigen, nehme man an, $D_v|_p$ sei die Derivation, die angewendet auf beliebige Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ identisch verschwindet und folgere, dass $v = (0, \dots, 0)$ gilt. Für die Surjektivität betrachte man eine beliebige Derivation $D \in T_p\mathbb{R}^n$ und definiere $(v_1, \dots, v_n)$ durch $v_i = D(x_i)$. Hierbei bezeichnet $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto x_i$ die Projektion auf die i-te Koordinate. Zeige dann, dass $D = D_v|_p$ gilt.]

103. Über den Zusammenhang zwischen Derivationen und Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra mit Eins-Element $\mathbb{1}_A$ und $\varphi : A \to \mathbb{R}$ ein Algebrahomomorphismus (d.h. insbesondere $\varphi(\mathbb{1}_A) = 1$). Sei $\mathrm{Der}_\varphi(A) \subset \mathcal{L}(A, \mathbb{R})$ der Unterraum von $\mathcal{L}(A, \mathbb{R})$, der durch

$$\mathrm{Der}_\varphi(A) := \{\, D \in \mathcal{L}(A, \mathbb{R}) \mid D(ab) = \varphi(a)D(b) + D(a)\varphi(b) \ \text{ für } a, b \in A \,\}$$

definiert ist. Zeige:

(a) Für alle $D \in \mathrm{Der}_\varphi(A)$ gilt: $D(\mathbb{1}_A) = 0$. *(4 Punkte)*

(b) Seien $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a_1, \dots, a_n \in \ker(\varphi)$ sowie $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \ker(\varphi)$. Dann gilt für alle $D \in \mathrm{Der}_\varphi(A)$

$$D\left(\lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m b_j c_j\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D(a_i).$$

(4 Punkte)

(c) Wenn $a_1, \dots, a_n \in \ker(\varphi)$ existieren, so dass jedes $a \in A$ als $a = \lambda_0 \mathbb{1}_A + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^m b_j c_j$ mit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m \in \ker(\varphi)$ geschrieben werden kann, so ist die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Der}_\varphi(A) \to \mathbb{R}^n, \quad D \mapsto (D(a_1), \dots, D(a_n))$$

injektiv. *(4 Punkte)*

104. SHEET 9: An example of an non-complete vector field.

This is the same as the example I gave, but with a different starting point for the exercise.

Auf $X = \mathbb{R}^2$ betrachten wir das Vektorfeld $G \in \mathrm{Vec}^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$G(x) = \|x\|^2 \cdot x$$

für $x \in \mathbb{R}^2$. Man bestimme die maximalen Integralkurven von G und zeige, dass G nicht vollständig ist. *(8 Punkte)*

[Tipp. Man wende (a) mit dem Vektorfeld $F(x) := x$ an. Die Integralkurven von F kann man bestimmen, indem man die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung "'errät"'. — Die maximalen Lösungen der Differentialgleichung $y' = e^{2y}$ sind die Funktionen

$$y : (-\infty, \tfrac{c}{2}) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y(x) = -\tfrac{1}{2} \ln(-2x + c)$$

mit Konstante $c \in \mathbb{R}$.]

105. SHEET 13: Symplektische Tensoren.

Es sei V ein endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum. Ein *symplektischer Tensor* auf V ist ein $\omega \in (V')^{\otimes 2}$, das nicht entartet ist; dabei bedeutet letzteres

$$\forall v \in V \setminus \{0\} \ \exists \widetilde{v} \in V \ : \ \omega(v, \widetilde{v}) \neq 0$$

(wobei wir hier wie auch im Folgenden ω mittels des kanonischen Isomorphismus $V'' \cong V$ auch als Bilinearform $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ auffassen). Es sei ω ein symplektischer Tensor auf V.

(a) Zeige, dass die Abbildung

$$V \to V',\ v \mapsto \omega(v,\,\cdot\,)$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist. *(6 Punkte)*

(b) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$. Zeige: Es existiert ein zu v linear unabhängiger Vektor $\widetilde{v} \in V$ mit $\omega(v, \widetilde{v}) = 1$, und für jedes solches $\widetilde{v}$ gilt

$$\dim\big(\ \ker \omega(v,\,\cdot\,) \cap \ker \omega(\widetilde{v},\,\cdot\,)\big) = \dim(V) - 2\,. \qquad (6\ \textit{Punkte})$$

(c) Beweise: Die Dimension von V ist notwendigerweise gerade, etwa gilt $\dim(V) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und es existiert eine Basis $(v_1, \dots, v_n, \widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_n)$ von V mit

$$\omega(v_k, v_l) = \omega(\widetilde{v}_k, \widetilde{v}_l) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(v_k, \widetilde{v}_l) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$. *(8 Punkte)*

106. Orientibility in 1 dimension

We know from the Easter exercise that: jede 1-dimensionale, zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit entweder zu $\mathbb{R}$ oder zu S^1 diffeomorph ist. Folgere hieraus:

(a) Jede 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist orientierbar. *(2 Punkte)*

(b) Ist X eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, so sind alle differenzierbaren Strukturen auf X zueinander diffeomorph. *(2 Punkte)*

107. SHEET 14: Aus der symplektischen Geometrie.

Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine 2-Differentialform ω auf X heißt *symplektische Form*, wenn ω geschlossen ist (d.h. $\mathrm{d}\omega = 0$ gilt), und für jedes $x \in X$ der alternierende Tensor $\omega(x) \in (T_x'M)^{\otimes 2}$ nicht entartet ist (siehe Aufgabe 39). In dieser Situation nennt man das Paar (X, ω) eine *symplektische Mannigfaltigkeit.*

Man zeige für eine symplektische Mannigfaltigkeit (X, ω) die folgenden Aussagen. Dabei sollen die Ergebnisse von Aufgabe 38 verwendet werden.

(a) Die Dimension von X ist notwendigerweise gerade. *(1 Punkt)*

(b) Die Abbildung

$$TX \to T'X,\ v \mapsto i_v\omega = \langle \omega\,,\, v \otimes \Box \rangle$$

ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Daher existiert zu jeder Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ genau ein Vektorfeld $H_f \in \mathrm{Vec}^\infty(X)$ mit

$$i_{H_f}\omega = \mathrm{d}f \ .$$

H_f heißt das *Hamiltonsche Vektorfeld* zu f. *(4 Punkte)*

(c) Sei $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Jede Integralkurve $c : (a, b) \to X$ des Hamiltonschen Vektorfelds H_f ist eine Niveaulinie von f (d.h. $f \circ c$ ist konstant). *(4 Punkte)*