$$A : V \times V \xrightarrow[\text{bilinear}]{} W$$

$$B : \underset{\text{lin}}{V \longrightarrow} \underset{\text{lin}}{(V \to W)}$$

Wir definieren eine Abb, die jedem A ein B zuordnet wobei $B(v)(v') = A(v,v')$.
Genauso definieren wir aber auch eine Abb, die jedem B ein A zuordnet $A(v,v') = B(v)(v')$.
Diese beiden Abbildungen sind dann invers zueinander. Deshalb werden durch diese Abbildungen

die bilinearen Abb. ist die lineare Abb. in die linearen Abb. durch eine bijektive Abb. miteinander identifizierbar!

$V \otimes V \simeq$ bilineare Abb. von $V' \times V' \to \mathbb{K}$,

$v \otimes w$

$\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))$ nennt man Vektoren

$V' \otimes V' \otimes W$ ist kein normalen Vektoren.

$V'' \simeq V, \quad V'' \simeq V$

Geometrische Interpretation der 2ten Ableitung

$f: X \to \mathbb{R}$,

$x(t) = x_0 + t x_1$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 f(x(t)) = \frac{d}{dt}\left(f'(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{d}{dt} x(t) = x_1 \text{ ist konstant} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} x(t) = 0. \end{array} \right)$$

$$= f''(x(t))(\dot{x}(t))(\dot{x}(t))$$

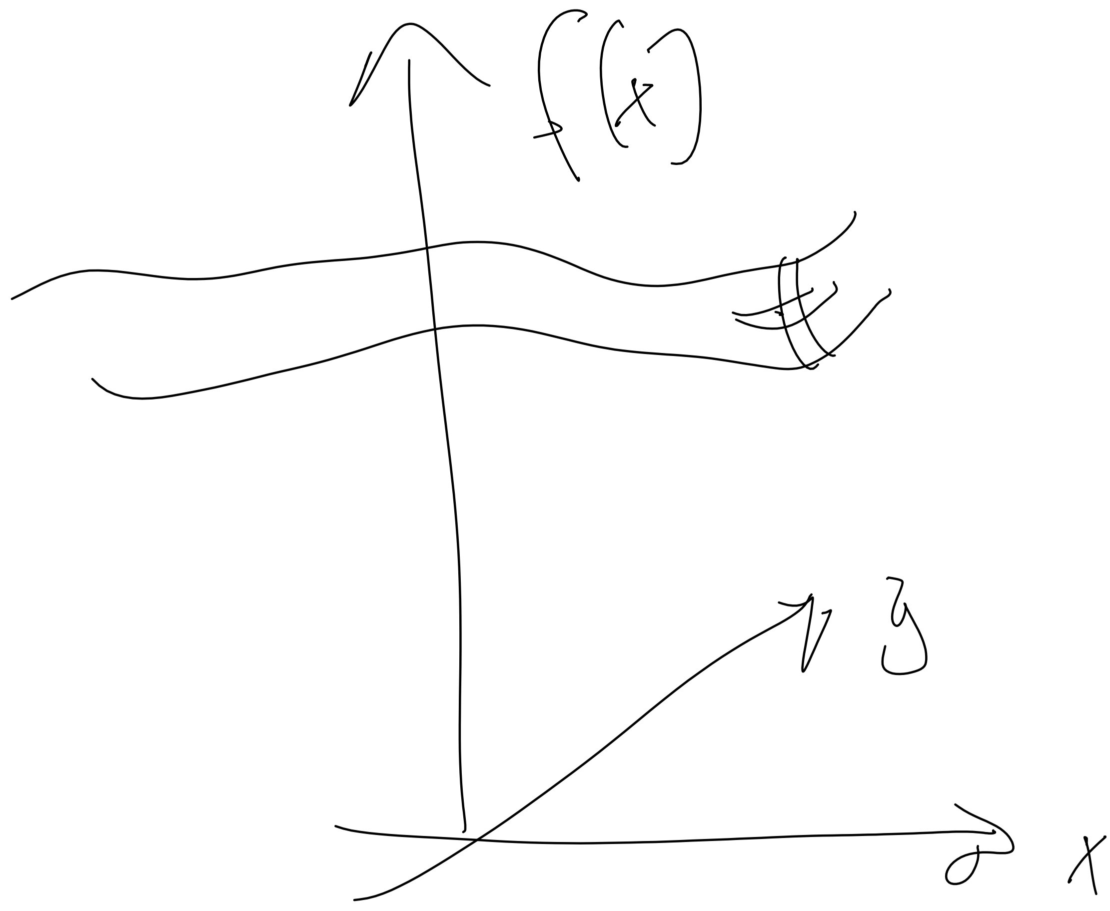
Das ist also die Bilinearform der 2ten Ableitung ausgewertet auf $\dot{x}(t)$ in beiden Einträgen.

Also hat die Krümmung in allen

Richtung der gleichen Krümmung,
wo die bilineare Form
positiv bzw. negativ definit.

Wenn wir also den Graphen
ansehen von einer Funktion

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$



f, ∇f

Δf Spur der Hessematrix

$f''(x_0)(x,x) \geq 0$ und sogar

$\Updownarrow$ strikt größer Null für $x \neq 0$.

$f''(x_0)(x,x) \geq \varepsilon \|x\|^2$

für endlich dimensionale Vektoren.

Fall:

Wenn x_0 ein Minimum ist,

dann $f''(x_0)(x_1,x_1) \geq 0$ für alle $x_1 \in X$.

$x(t) = x_0 + t x_1$

Wenn x_0 ein lokales Minimum ist,

dann gilt $\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0} \geq 0.$

$$\|$$

$$f''(x_0)(x_1, x_1).$$

Umkehrung: Wenn sogar gilt

$$f''(x_0)(x, x) \geq \varepsilon \|x\|^2 \text{ für ein}$$

$\varepsilon > 0$ und alle $x_1 \in X$

Dann ist x_0 sogar ein striktes lokales Minimum.

$$f'(x_0) = 0 \qquad f''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathbb{R}))$$

$$f'(x_0 + x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x)$$

$f''(x_0)(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$ und

$f'(x_0), f'(x_0+x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$,

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B(0, \delta)$

$$\frac{\| f'(x_0+x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x) \|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad | f'(x_0+x)(x) - f'(x_0)(x) - f''(x_0)(x)(x) | < \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \cdot \|x\|$$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$f'(x_0+x)(x) - f'(x_0)(x) - f''(x_0)(x,x) + f''(x_0)(x,x)$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0+x)(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0+tx)(tx) \geq \frac{\varepsilon}{2} t^2 \|x\|^2$$

$f'(x_0+tx)(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} t \|x\|^2$,

$$f(x_0+x) - f(x_0) = \int_0^1 f'(x_0+tx)(x)\,dt$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 t\|x\|^2\,dt = \frac{\|x\|^2\varepsilon}{2}\int_0^1 t\,dt$$

$$= \frac{\|x\|^2}{4}\varepsilon$$

$x \in B(0,\delta)$. $\quad f(x_0+x) \geq f(x_0) + \frac{\|x\|^2}{4}\varepsilon$

<u>Beispiel 10.78</u> Wir zeigen, dass es eine Funktion f gibt, die glatt ist und die ~~bei~~ $x=0$

$$f''(0)(x)(x) \geq 0 \text{ und für } x \neq 0$$

$$f''(0)(x)(x) > 0.$$

~~Dann~~ ist 0 kein lokales Minimum

Also gilt es auch bei $\varepsilon > 0$

mit $\left(f''(0)(x)\right)(x) \geq \varepsilon \|x\|^2$.

$$f : C([0,1]) \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^1 x^2(t)\,(t - x(t))\,dt$$

f ist die Verkettung eines Polynoms in $C([0,1])$ mit dem $\int_0^1 dt$

$$\left| \int_0^1 g(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 \|g\|_\infty\,dt \leq \|g\|_\infty \int_0^1 dt$$

$$= \|g\|_\infty$$

$\Rightarrow$ $g \mapsto \int_0^1 g(t)\,dt$ liegt $\mathcal{L}(C([0,1]), \mathbb{R})$

$x \mapsto x^2(t-x)$ wobei t eine Funktion in $C([0,1])$.

$$x^2(t-x) = t \cdot x^2 - x^3$$

a_2

$$x \mapsto a_2 x^2 - x^3$$

Die Ableitung bei x

$$y \mapsto a_2 2x \cdot y - 3x^2 y$$

$$\Rightarrow f'(x)(y) = \int_0^1 \left(2t\, x(t)\, y(t) - 3x^2(t)\, y(t)\right) dt$$

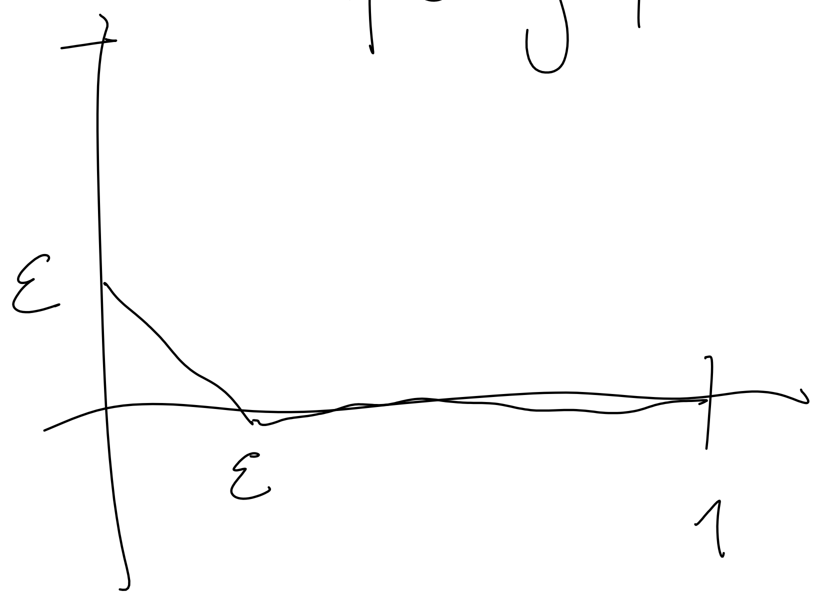
$$f''(x)(y)(z) = \int_0^1 \left(2t\, z(t)\, y(t) - 6x(t)\, y(t)\, z(t)\right) dt$$

$$f'(0) = 0 \qquad f''(0)(y)(z) = \int_0^1 2t\, z(t)\, y(t)\, dt$$

$$f''(0)(y,y) = \int_0^1 t\, y^2(t)\, dt > 0$$

$f \cdot y \neq 0.$

x_ε



$\|x_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$

$$f(s x_\varepsilon) = \varepsilon^4 \left(\frac{s^2}{12} - \frac{s^3}{4} \right)$$