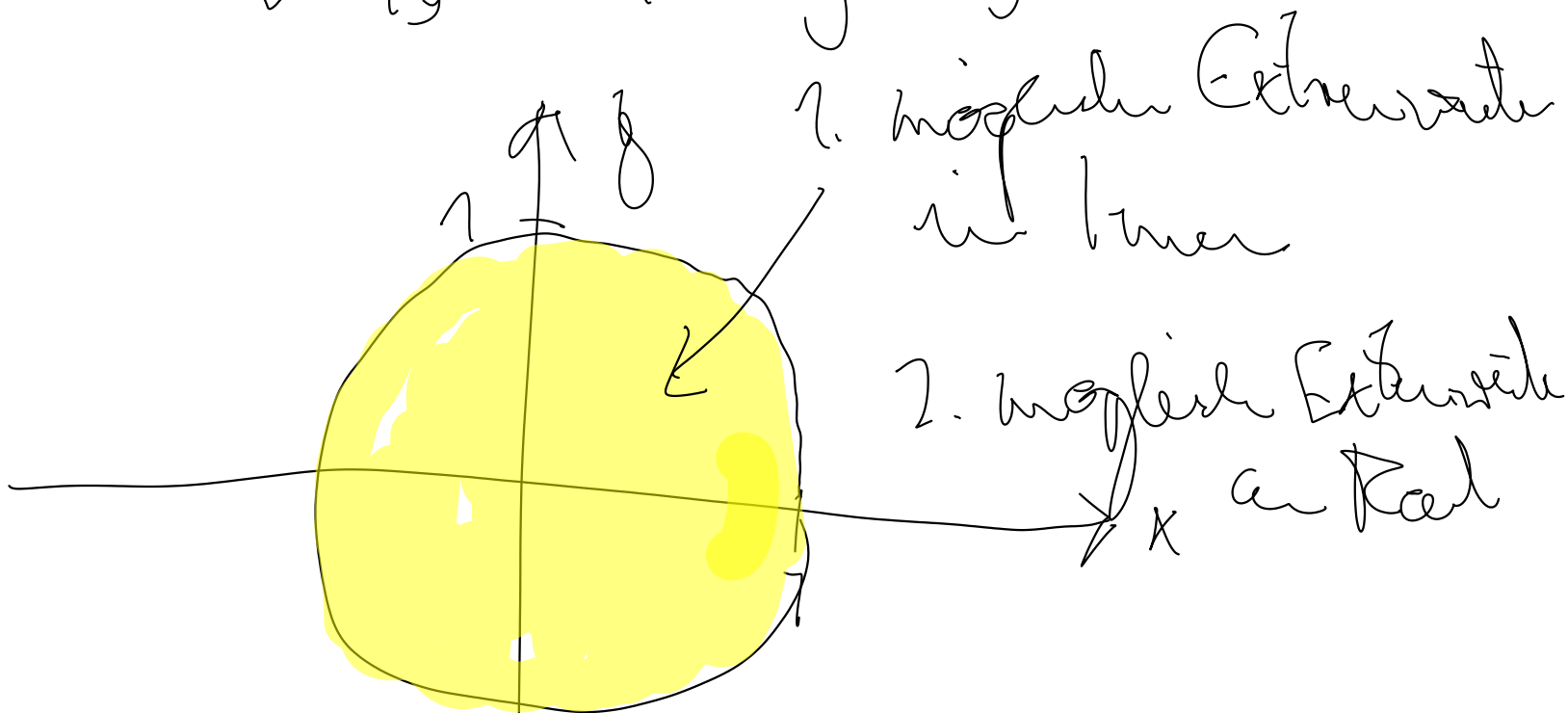


125 b) $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



K ist kompakt, weil K in $\mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen ist.

K ist beschränkt weil K nur aus den Punkten in $\mathbb{R}^2$ besteht, deren Länge, d.h. der Abstand zu Punkt $(0,0) \leq 1$ ist.

K ist abgeschlossen, weil

K das Urbild von $(-\infty, 1]$

unter der stetigen Abb. $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

ist. $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Dann die stetige Funktion f auf K
ein Minimum und ein Maximum an.

Wir zeigen K in der offenen
Ball $B(0, 1)$ und der Rand von
dem Ball d.h. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Zeigt sich nun nach Minimum und
Maximum auf $B(0, 1)$. Weil f diff.
ist, um bei allen lokalen Extremwerten
die Ableitung d.h. der Gradient von
 f verschwindet.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

$$= (8x - 3y, -3x)$$

$$\text{I } 8x - 3y = 0 \quad \text{und} \quad \text{II } -3x = 0.$$

$$\text{II} \Rightarrow x = 0 \quad \text{dann folgt aus I } y = 0.$$

$(0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$ ist ein Kandidat.

Es ist der einzige Kandidat $B(0, 1)$.

Als zweites suchen wir nach lokalen Extremwerten auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Das ist die Nullmenge von der Funktion $g(x, y) = x^2 + y^2$ und den Wert $g(x, y) = 1$.

Wir untersuchen zuerst, ob die Niveau-
menge Singularität enthält.

$$\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \quad \nabla g(x,y) = (0,0)$$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Der Punkt liegt
nicht in der Niveau-menge. Also ist
die Niveau-menge stetig diff'bar und
hat kein Singularitäten.

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0.$$

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + \lambda 2x = 0 & \text{I} \\ -3x + \lambda 2y = 0 & \text{II} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{III} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Die Lagrange-} \\ \text{Multiplikator } \lambda \\ \text{und} \\ \text{3 Gleichungen.} \end{array}$$

$$\text{II} \quad -3x + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\lambda y}{3}$$

$$\frac{16\lambda y}{3} - 3y + \frac{4\lambda^2 y}{3} = 0$$

$$y(4\lambda^2 + 16\lambda - 9) = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{oder } 4\lambda^2 + 16\lambda - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$4(\lambda + 2)^2 - 9 - 16 = 0$$

$(6,0)$ liegt nicht
in der Nullmenge

$$(\lambda + 2)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\lambda + 2 = \pm \frac{5}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{9}{2}$$

$$x = \frac{y}{3} \quad y = 3x$$

$$9x^2 + x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{10}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \quad y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

d.h. $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

$$f(x,y) = \frac{4}{10} - \frac{9}{10} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

in beiden Fällen den gleichen Wert

$$\lambda_2 = -\frac{9}{2} \quad x = -3y$$

$$9y^2 + y^2 = 1 \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \quad x = \mp \frac{3}{\sqrt{10}}$$

d.h. $\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$

$$f(x,y) = 4 \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{10} = \frac{9}{2}$$

Wir haben 5 Kardinalen, unter den
den Maxim und den Minus Steu-
Pun sind $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ und

beiden Minima ist $f(x,y) = -\frac{1}{2}$
bei $(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ und

beiden Maxima ist $f(x,y) = \frac{9}{2}$

124b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$

f ist diff. Also ist $L \in \mathbb{R}$ genau
dann ein Lipschitzkonstante, wenn

$$|f'(x)| \leq L \text{ f\"ur alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt.}$$

(Satz von Scheitersatz, in Analysis I).

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) < 1 \text{ f\"ur alle } x \in \mathbb{R}.$$

F\"ur alle $L < 1$ gilt es in $x \in \mathbb{R}$

mit $|f'(x)| \leq L$, weil f stetig
ist und weil

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 1.$$

Also ist $L=1$ die kleinste Lipschitz
konstante von f und es gilt auch
die Voraussetzung des Banachschen
Fixpunktsatzes.

Hat f Fixpunkte:

$$x = \frac{\pi}{2} + x - \arctan(x)$$

$$\Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also hat f kein Fixpunkt.

$\arctan(x)$ ist streng monoton steigend.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Sei $f: X \rightarrow X$ Lipschitzstetig mit

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

und X kompakt. Dann hat f
genau ein Fixpunkt.

Wann ist lokales Maximum
globales Maximum?

Man zeige, dass ein lokales
Maximum ein globales Maximum ist,

um sie alle möglichen Kandidaten
von Maximal betrachten und den die
Funktionswerte vergleicht.

Daher um von

— lokalen Extremwerten, die kritischen
Punkte sind

— Punkte an denen die Funktion lokal
differenzierbar ist

— Randpunkte.

sidimensional z.B. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$

oder die Funktionswerte auf
gerade gestellte Gerade!

Alternativ kann man auch direkt
versuchen zu zeigen, dass $f(x) \leq C$

für ein $C \in \mathbb{R}$ gilt und
 $f'(x_C) = C$.

$$f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{\left[\frac{1}{n}, 1\right]}(x)$$

$$f_n(x) \in L^1(\mathbb{R}).$$

$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist stetig auf $(0, \infty)$.

und deshalb auf der kompakten Teil-

menge $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \subset (0, \infty)$ beschränkt.

→ Aber bilden die Unstetigkeitsstellen

da f_n ein Maßmaß, nämlich

$$\left\{ \frac{1}{n}, 1 \right\}.$$

→ f_n ist beschränkt

- f_n ist außerhalb von der kompakten Menge $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ gleich Null.

Also ist $f_n \in L^1(\mathbb{R})$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend,

- weil $\left[\frac{1}{n+1}, 1\right] \supset \left[\frac{1}{n}, 1\right]$

- und weil $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int f_n \, d\mu &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \left[\sqrt{x} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{n}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist in keiner fallenden Folge
 $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ $\sim \sim \sim \sim \sim$

$1 - \sqrt{\frac{1}{n}}$ $\sim \sim \sim$ wachsende Folge.

aber sie ist beschränkt durch 1.

$$1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \geq 1.$$

Dann folgt aus dem Satz von Beppo Levi, dass der punktweise Grenzwert von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{L}(\mathbb{R})$ liegt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Der punktweise Grenzwert ist

$f: X(a_n, b_n)$ annehmen, dann ist
 für alle $x \in \mathbb{R}$ die $n \in \mathbb{N}$
 beliebig, so dass $x \in (a_n, b_n)$
 liegt. Typischerweise ist die
 Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend
 und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Dann besteht die Menge aller
 $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in (a_n, b_n)\}$
 aus der leeren Menge oder
 aus der Form $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\}$
 für ein $N \in \mathbb{N}$.

Der Rang in einer Abbildung

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ist die Dimension des Bildes.

Der Rang ist höchstens das
Minimum von n und m .

Eine symmetrische Matrix ist genau
dann positiv (negativ) definit,
wenn alle Eigenwerte positiv
bzw. negativ sind.

Unbegrenztes Riemannintegral - Lebesgue-
Integral.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende
Folge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende

Folge von $f|_{[a_n, b_n]}$ Riemannintegrierbar

so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f dx$ existiert

und $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Sei $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{[a_n, b_n]} f$

Dann ist $|g| \in L^1(\mathbb{R})$, weil

$|g| \leq |f|$ und Lebesgues Satz
der beschränkten Konvergenz.

Konvergenz $\chi_{[a_n, b_n]} |f|$ gegen
 $|g| \in L^1(\mathbb{R})$

Du folgst am Lebesgues Satz der
beschränkten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \int g d\mu$$

Standardaufgaben: (gleich)

- Satz von Lebesgue Extensum
mit oder ohne Nebenbedingung
- Anwendung des Satzes der Implikation
mit inversen Funktionen
- Jacobischer Transformationsfaktor
- Frage nach der Existenz und
der Wahl von Richtungsableitung,
partielle Ableitung und Ableitung

