Ist der Graph jeder Funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

Im allgemeinen ist die Antwort schon nein, weil der Graph nicht immer messbar ist.

Wenn f messbar ist, dann ist der Graph eine Nullmenge.

Beispiel 12. $\mathbb{R}(1)$ ist ein Beispiel einer offenen Teilmenge $O \subset [0,1]$ so dass $O \cap ([0,1] \setminus O)$, also der Rand von O keine Nullmenge ist.

Der Rand einer mehr offenen Teilmenge $A \subset X$ ist die Schnittmenge von Abschluss von A mit dem Abschluss von $X \setminus A$. D.h. dass in alle Punkte

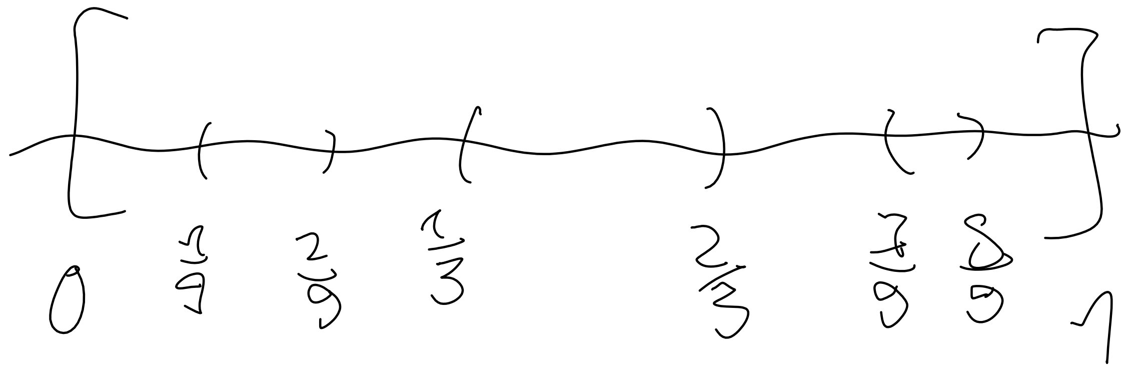
Grenzwerte der Folge in A und Grenzwerte der Folge in X\A sind.

Dein Beispiel zeigt auch, dass obwohl die rationalen Zahlen dicht in [0,1] liegen, nicht jede offene Teilmenge [0,1] die die rationalen Zahlen in [0,1] enthält auch [0,1] bedeckt.

Dein Argument, dass O nicht ganz [0,1] bedeckt.

Beispiel 12.18 (ii) Cantormenge

Sie haben nur benutzt um zu zeigen, dass die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist zu $\mathbb{R}$, und eine Nullmenge ist. D.h. die Cantormenge für eine Nullmenge die nicht abzählbar ist.



Ich stelle den Fall bis zum Fall $n=3$ dar.

$[0,1] \setminus A$ ist eine Vereinigung über offene Intervalle.

Wir berechnen jetzt den Volumen von

$[0,1] \setminus A$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3-2} = 1$$

Wenn wir von Konvergenz in $L^1(\mathbb{R}^d)$ sprechen, dann ist die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_1$ gemeint.

und andererseits die Konvergenz punktweise fast überall.

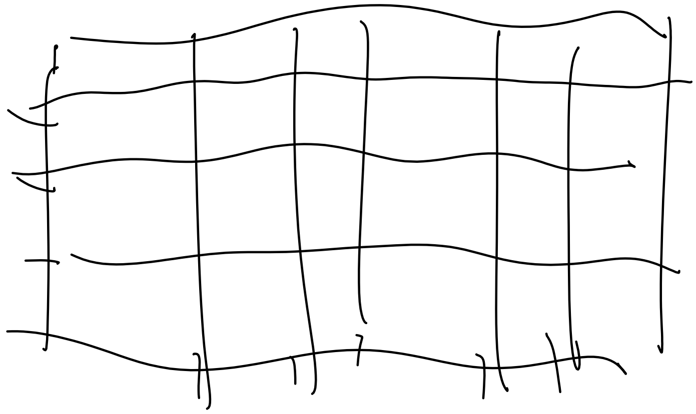
$(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Wir setzen voraus, dass $\int |f| \, d\mu = 0$.

und wollen zeigen, dass $f = 0$ a.e. gilt.

$$\int n|f| \, d\mu = n \int |f| \, d\mu = 0.$$

(Beppo Levi) $\Rightarrow$ $(n|f|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall. Diese Folge konvergiert genau bei den $x \in \mathbb{R}^d$, für die $f(x) = 0$.



$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx$$

$L^1(A)$ $A \subset \mathbb{R}^d$ measurable.

$A \subset \mathbb{R}^d$ open.