Wieso genügt es lineare Abbildung $A : V \to W$, V, W normierte Vektorräume, die uns zwischen nur auf $B(0,1)$ bzw. $\overline{B(0,1)}$ in V zu betrachten.

Wir können das machen, weil eine lineare Abb $A : V \to W$ eindeutig durch die Einschränkung von A auf $B(0,1)$ bzw. $\overline{B(0,1)}$ bestimmt ist.

Für jeden $v \in V \setminus \{0\}$ gilt nämlich

$$A(v) = A\left(\frac{2\|v\|}{2\|v\|} \cdot v\right)$$

$$= A\left(2\|v\| \cdot \frac{v}{2\|v\|}\right)$$

$$\left(\left\|\frac{v}{2\|v\|}\right\| = \frac{\|v\|}{2\|v\|} = \frac{1}{2} < 1.\right)$$

$$= 2\|v\| \, A\left(\frac{v}{2\|v\|}\right)$$

$$\frac{v}{2\|v\|} \in B(0,1).$$

Für $\overline{B(0,1)}$ gilt analog

$$A(v) = \|v\| \, A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

mit $\frac{v}{\|v\|} \in \overline{B(0,1)}$.

Das taucht in gewissen Weise Frage auf, wann ist eine Abbildung $B(0,1) \to W$ bzw. $\overline{B(0,1)} \to W$ die Einschränkung einer linearen Abb. $A: V \to W$?

Um diese Frage zu beantworten geht geht man am besten folgenden.

Aufgabe 3e:

Wir fordern zusätzlich, dass für alle $v \in B(0,1)\setminus\{0\}$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda \cdot v \in B(0,1)$, d.h. $0 < \lambda < \frac{1}{\|v\|}$ $A(\lambda\cdot v) = \lambda A(v)$

Solche A besitzen eine eindeutige Fortsetzung auf die oben beschriebene Art und Weise nach ganz V.

Diese Abb. erfüllt dann sogar $A(\lambda\cdot v) = \lambda A(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Im Skript sind die Aussagen so formuliert, dass von der Frage gar nicht berührt werden müssen.

Beweis von Satz 9.56
(i) $\Rightarrow$ (v)

$$\|Av\| = \left\|A\left(\tfrac{1}{\delta}\cdot\delta v\right)\right\| = \left\|\tfrac{1}{\delta}A(\delta v)\right\|$$

$$= \frac{1}{\delta}\|A(\delta v)\|$$

$$\|v\|<1 \Rightarrow \|\delta v\| = \delta\|v\| < \delta.$$

A und $A|_{\overline{B(0,1)}}$ sollten unterscheiden werden!

Die Abb. $A \to A|_{\overline{B(0,1)}}$ definiert eine Isometrie von $\mathcal{L}(V,W)$ nach $C_b(\overline{B(0,1)}, W)$

Deshalb sind als normierte Vektorräume $\mathcal{L}(V,W)$ und das Bild der Isometrie isomorph, d.h. gleichen Namen.

$$\|Au\| \le \|A\| \cdot \|u\|$$

$$\|(B \circ A)(u)\| = \|B(A(u))\|$$

$$\le \|B\| \, \|Au\| \le \|B\| \cdot \|A\| \, \|u\|$$

$v \in V \setminus \{0\}$ sonst ist klar $Av = 0$

$$\|Av\| = A\left(\|v\| \frac{v}{\|v\|}\right) = \|v\| \cdot A\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

$$\le \|v\| \, \|A\| .$$

$\bar{A}$ besteht aus den Grenzwerten von Folgen in A, die in $C_b(X, \mathbb{R})$ konvergieren.

Also gibt es für jedes $f \in \bar{A}$ eine Folge f_n in A, die gegen f konvergiert.

Wegen der Stetigkeit von $f \mapsto |f|$ konvergiert dann auch $|f_n|$ in $C_b(X,\mathbb{R})$. Weil $f_n \in \bar{A}$ liegt, liegt dann auch $|f|$ in $\breve{A}$ weil $(\bar{A})^{\breve{}} = \breve{A}$.

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x - y + |x-y|).$$

$\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 < 1\}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^3 + y^3$ ist stetig

$(-\infty, 1)$ ist offen in $\mathbb{R}$

$B(0,1)$ bezüglich $\| \ \|_4$ auf $\mathbb{R}^2$ ist $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^4 + y^4)^{1/4} < 1\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 < 1\}$

$d: X \times X \to \mathbb{R}$ ist stetig.

$\Rightarrow$ für alle $x \in X$ ist auch die

Abb $X \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x,y)$ stetig

Das Urbild der Abgeschlossenen

Menge ist abgeschlossen

$(\infty, 1]$ $\quad$ $[0,1]$

Es gilt nicht in allen metrischen

Räumen $\{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\} = \overline{B(x,1)}$

$X \subset \mathbb{R}$ $\quad$ $[0, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$.

$B(0,1) = [0, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow \overline{B(0,1)} = [0, \frac{1}{2}] \neq [0, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$