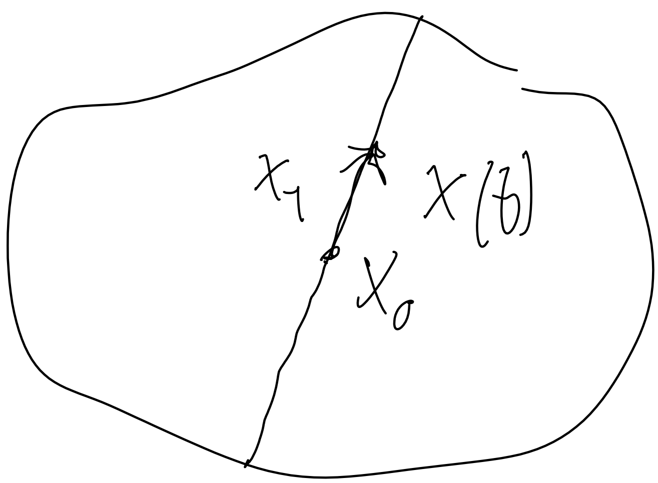
$U \subset X$ offen, X, Y normierte VR

$f: U \to Y$. Sei $x_0 \in U$, $x_1 \in X$



U

$x: \mathbb{R} \to X$, $t \mapsto x_0 + t x_1$

$x^{-1}[U]$ ist offen und enthält $t = 0$, weil

$x(0) = x_0 \in U$. Deshalb

exists ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset x^{-1}[U]$

$x: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $t \mapsto x(t)$

x ist differenzierbar, weil $x(t)$ die Summe

ein konstanten Abb. x_0 und ein linearen lineare Abb. $\mathbb{R} \to X$, $t \mapsto t \cdot x_1$

und stetig. Also ist x diffb und hat

die Ableitung $t \mapsto t \cdot x_1$, also im

Sinne von Beispiel 10.3 (iii) ist

die Ableitung konstant gleich x_1

Wenn f in x_0 diffb ist,

dann ist auch $f \circ x$ in $t = 0$ diffb.

und die Ableitung von $f \circ x$ ist die

$t \mapsto f'(x_0)(t \cdot x_1) = t \cdot f'(x_0)(x_1)$

im Sinne von Beispiel 10.3 (iii)

ist die Ableitung bei $t = 0$ also gleich

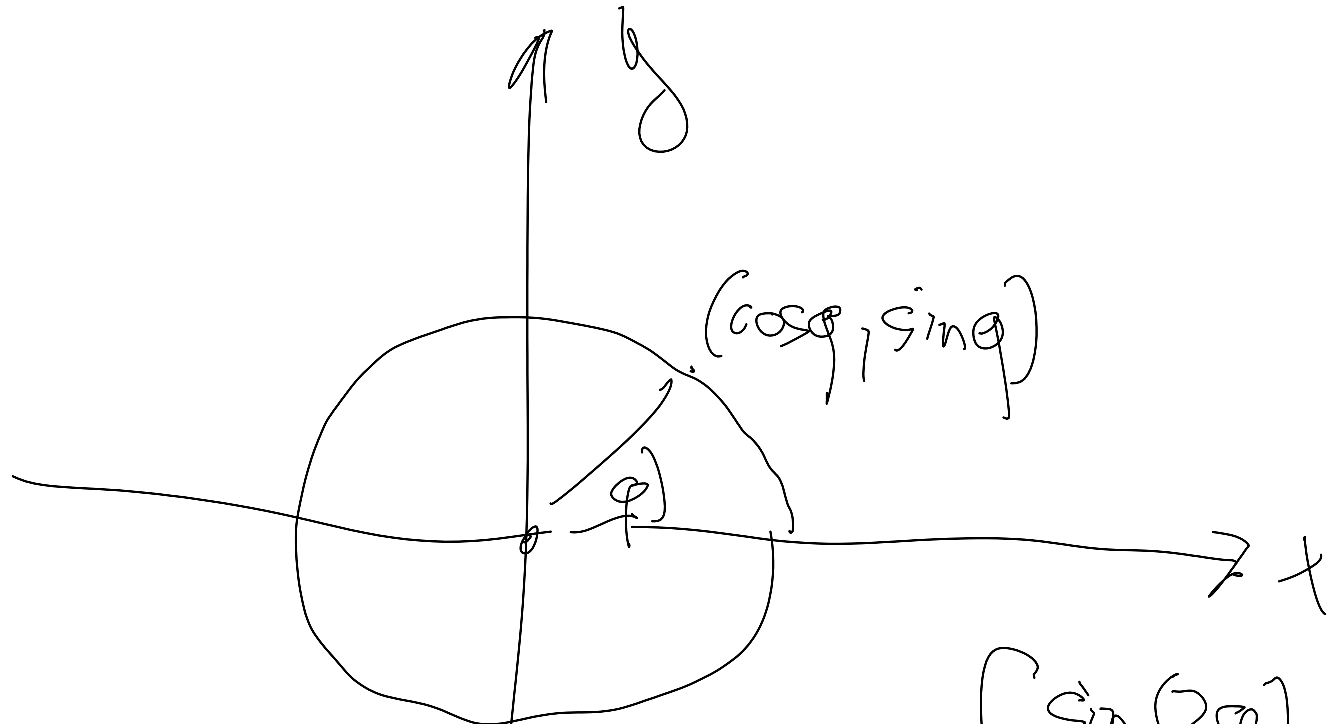
$f'(x_0)(x_1)$. Also existiert die

Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung

x_1 und ist gleich $f'(x_0)(x_1)$.

Beispiel 10.14 (ii)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$



$t \mapsto f(t\cos(\varphi), t\sin(\varphi)) = \begin{cases} \sin(2\varphi) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$

Sie ist nur stetig bei $t=0$, wenn

$\sin(2\varphi) = 0 \iff 2\varphi \in \pi\mathbb{Z} \iff \varphi \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$

Also genau auf den beiden x- und y-Achsen. Also kann höchstens die

Richtungsableitungen in Richtung der x- bzw. y-Achse existieren: Wenn $\sin(2\varphi) = 0$ dann ist die Funktion $t \mapsto f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)$ konstant gleich Null, also diffb. mit Ableitung Null.

Also existieren die Richtungsableitungen nur, wenn (x,y) ein Vielfaches von $(1,0)$ oder von $(0,1)$ ist.

Wenn $(x,y) = (1,0)$ ist, dann ist die Richtungsableitung genau die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und wenn $(x,y) = (0,1)$ ist, dann ist es die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$t \mapsto f(t,0)$ für $t=x$ erhalten

wir $x \mapsto f(x,0)$

und $t \mapsto f(0,t)$ für $t=y$ erhalten

wir $y \mapsto f(0,y)$.

Allgemein auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt

die Richtungsableitung von f bei

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ in Richtung

$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0)$

ist gleich $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

$t \mapsto f(x + te_i)$

dann ergibt dies $f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n)$

Wenn $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, bei $x_0 \in U$ diffb ist, dann beschreibt die Jacobimatrix die lineare Abbildung $f'(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Wenn f bei x_0 diffb ist, dann existieren alle Richtungsableitungen, insbesondere die Richtungsableitung in Richtung von $e_1, \dots, e_n$, also die partiellen Ableitungen sind. Dann ist die Ab Ableitung in Richtung eines Vektor

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$f'(x_0)(y) = f'(x_0)(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n)$$

$$= y_1 f'(x_0)(e_1) + \dots + y_n f'(x_0)(e_n)$$

$$= y_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_e) + \cdots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_e)$$

$$= \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_e) y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_e) y_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_e) y_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_e) y_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_e) y_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_e) y_n \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} > \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Für $m=1$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla f(x) \cdot y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, y_n$$

(Zeilenvektor) · Spaltenvektor = Zahl.

$\nabla^T f(x_0)$

Spaltenvektor · Zeilenvektor = Matrix vom Rang 1.

$f: U \to \mathbb{R}^m$

grad f ist nur definiert für reellwertige Funktionen.

Die Divergenz ist nur definiert für

Vektorwertige Funktion $f: U \to \mathbb{R}^n$

$U \subset \mathbb{R}^n$ d.h. Vektorfelder $(m = n)$

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Der Gradient ist ein Vektorwertige Funktion und die Divergenz ein reellwertige Funktion.

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} f = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \dots + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 \partial x_n}$$

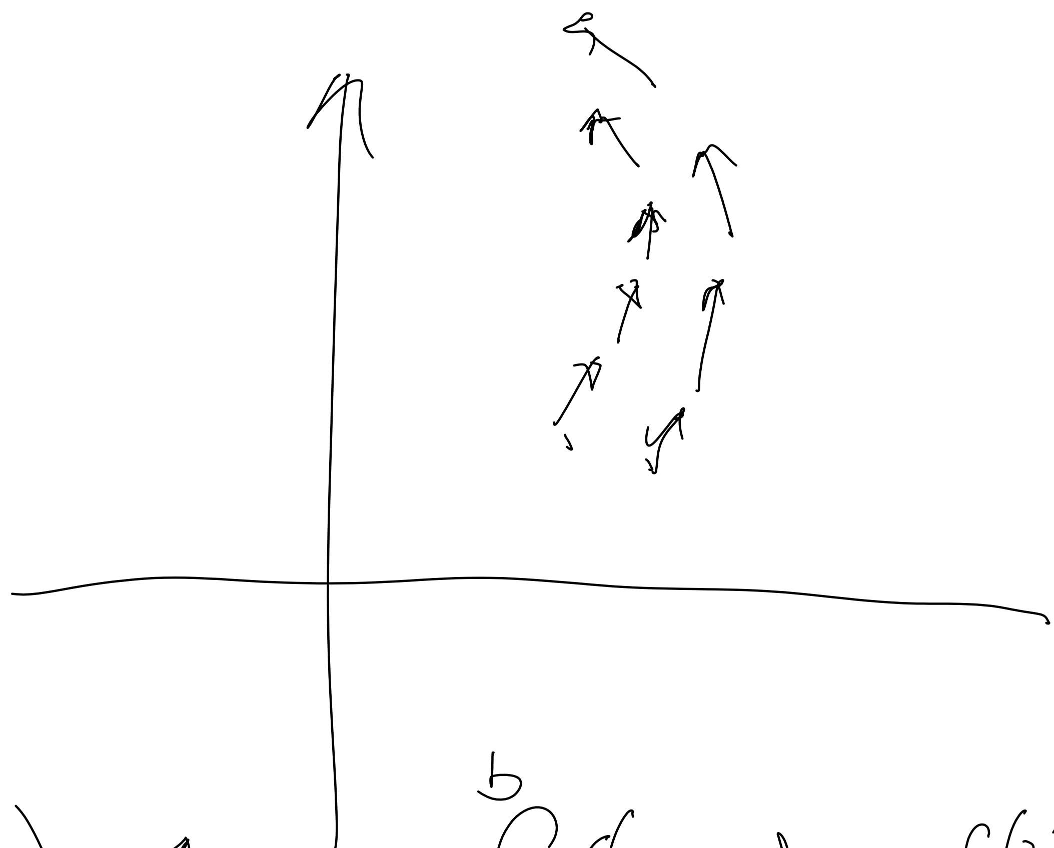
$$\vdots$$

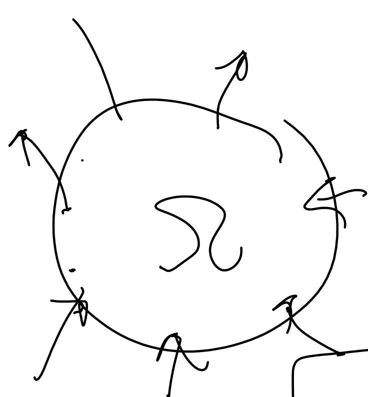
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n \partial x_1} + \dots + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} + \dots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f.$$

Für $n=3$ gibt es auch noch rot

rot f ist nur definiert für Vektorfeld mit $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$





$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} f \, d\mu = \int_{\partial\Omega} f \cdot N \, d\sigma}$$

grad f $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

grad f $\quad : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

grad : Funktion $\to$ Funktion

$\mathbb{R}$-wertige Funktion $\to$ $\mathbb{R}^n$-wertige Funktionen

$f \mapsto$ grad f

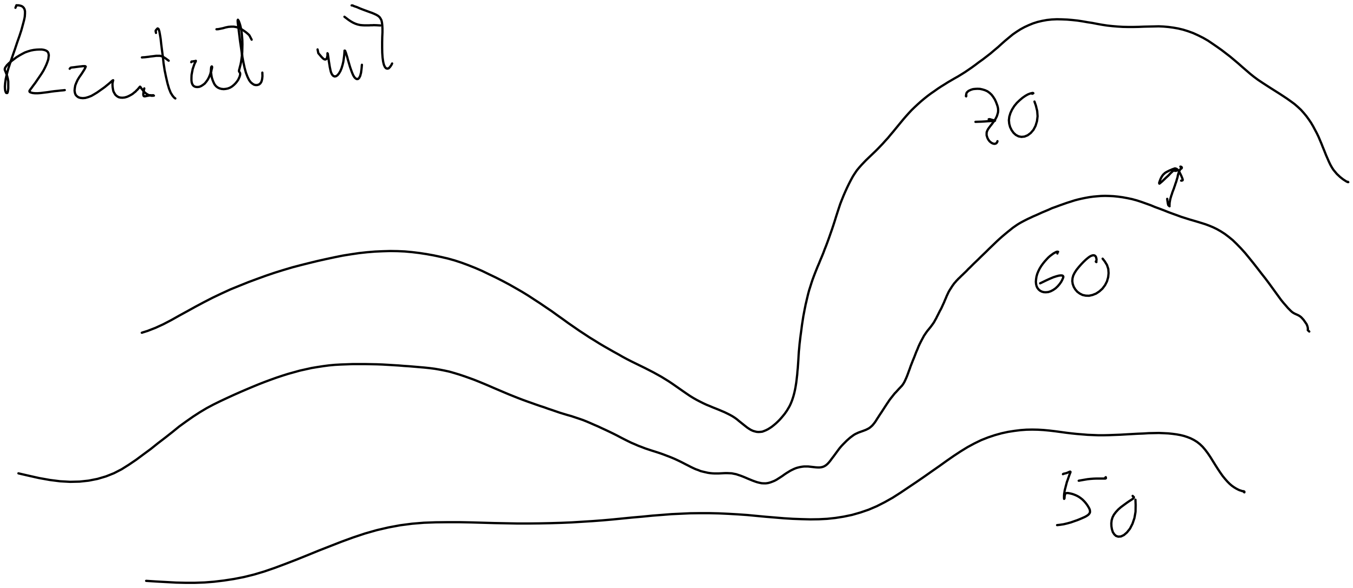
grad f(x) ist Vektor

Die Richtung von grad f(x) ist die Richtung in der sich f am meisten ändert und die Länge ist ein Maß dafür wie stark sich f ändert.

Höhenlinien beschreiben die Funktion die jedem Punkt die Höhe zuordnet

Niveaulinien lange denn die Höhe

Kontur ist



Sei $x : \mathbb{R} \to X$ ein diffb.

Finden, da ist

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

$$= \nabla f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)$$

Skalarprodukt von $\nabla f(x(t))$ mit $\dot{x}(t)$.

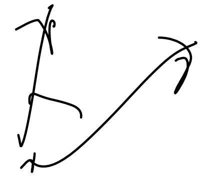
Sei x ein Vektor in $\mathbb{R}^n$

Für alle Vektoren y in $\mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = 1$

$\{y \cdot x \mid y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|y\| = 1\}$

Lot im Ursprung bei

$$y = \frac{x}{\|x\|}$$



$$\nabla f(x) \cdot y = \|\nabla f(x)\| \cdot \|y\| \cos\varphi$$