Stetigkeit, gleichmäßige,
Lipschitzstetigkeit:

<u>Stetigkeit</u>: Korollar 9.31

$Y = C_b([0,1], \mathbb{R})$ $\|\cdot\|_\infty$ Banachalgebra

$T: Y \to Y$, $f \mapsto f^2$

$f^2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x))^2$.

für jeden $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$

so dass $\|g-f\|_\infty < \delta$, dass dann

$\|g^2 - f^2\|_\infty < \varepsilon$.

$\|g^2 - f^2\|_\infty = \|(g-f)(g+f)\|_\infty$

$\leq \|g-f\|_\infty \cdot \|g+f\|_\infty$

$= \|g-f\|_\infty \cdot \|g-f+2f\|$

$$\leq \|g-f\|_\infty \left(\|g-f\|_\infty + 2\|f\|_\infty \right)$$

$$\leq \delta \left(\delta + 2\|f\|_\infty \right)$$

$$\delta \left(\delta + 2\|f\|_\infty \right) \leq \varepsilon$$

(Wähle $\delta \leq 1$.)

$$\delta \left(1 + 2\|f\|_\infty \right) \leq \varepsilon.$$

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1 + 2\|f\|_\infty}, 1 \right\}$$

<u>Lipschitzstetigkeit</u>

<u>Schrankensatz</u>: in Kapitel 10.

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x,y)$$

X normierter VR.

$X \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|.$

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq L \cdot \|x-y\|$$

Sei gilt für $L = 1$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$$

$$\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|.$$

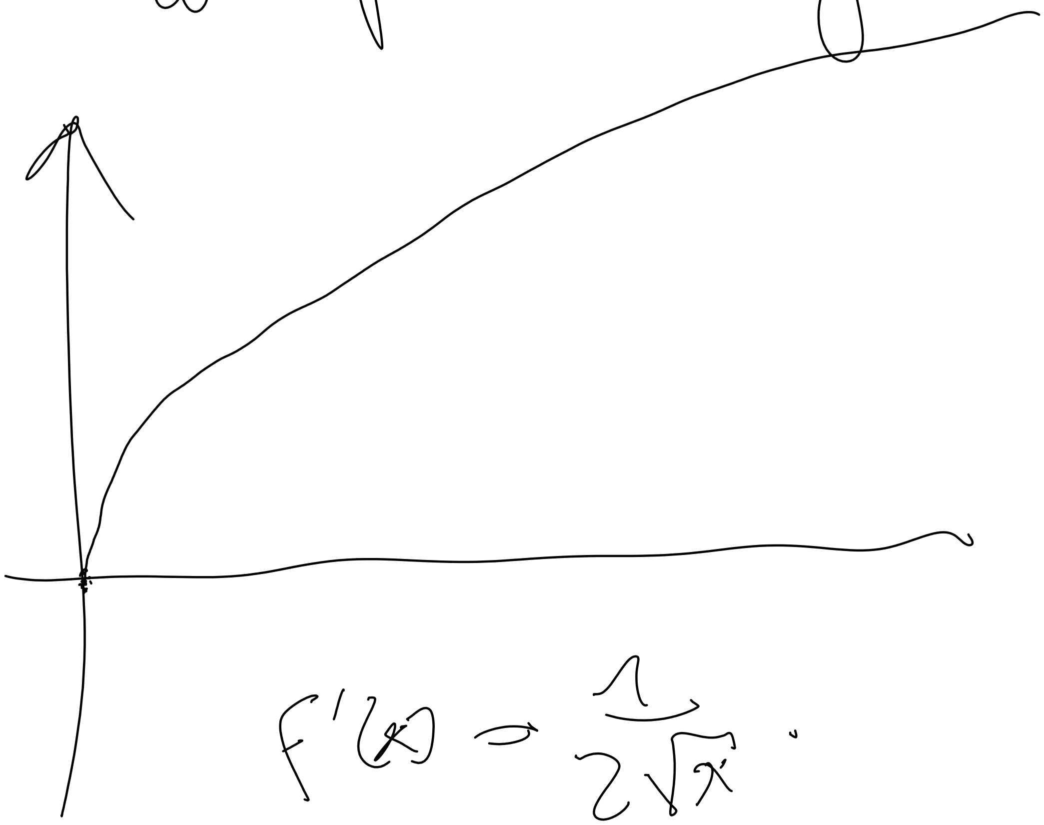
Gleichmäßige Stetigkeit

$f: X \to Y$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt.

z.B. $[0,\infty) \mapsto [0,\infty], x \mapsto \sqrt{x}$

ist gleichmäßig stetig, aber

nicht Lipschitzstetig



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

<u>Satz</u> Auf einer kompakten Menge

ist jede stetige Funktion auch

gleichmäßig stetig.

$[0,1]$ ist kompakt

Also ist $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0,1]$

gleichmäßig stetig:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\,|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$$

$$= \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{}|x-y| \text{ wenn}$$

$|x| \geq 1$ oder $|y| \geq 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ dann gibt es ein $\delta > 0$

so dass die Aussage für alle

$x, y \in [0,1]$ gilt.

Wir setzen $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$

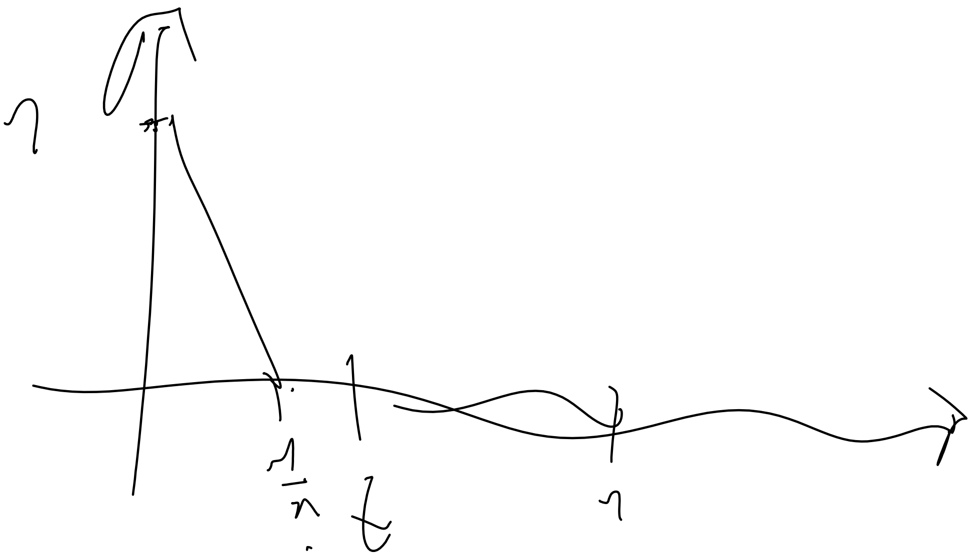
Dann gilt die Aussage.

Gleichmäßige Konvergenz

versus punktweiser Konvergenz

$$f_n(t) = \begin{cases} 1-nt & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

$f_n \in C([0,1],\mathbb{R})$.



Gilt für jedes $t \in [0,1]$, dass $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Für $t=0$ gilt $f_n(t)=1$.

Für $t>0$ gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < t$. Dann folgt für alle $m \geq n$

$f_m(t) = 0$. Also konvergiert

$(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 für $t=0$ und gegen 0 für $t \to 0$.

Gleichmäßige Konvergenz ist die Konvergenz bezüglich $\| \; \|_\infty$. Allgemein: daß für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists$ ein N, ab dem die Funktionen $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ für alle x gelten muss, daß n von ε abhängt, aber nicht von x.

Wir zeigen jetzt, daß $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert. Die gleichmäßige Konvergenz ist stärker.

Deshalb ist der einzig mögliche gleichmäßige Grenzwert der punktweise Grenzwert.

$\|f_n - f\|_\infty$?

$\|f_n - f\|_\infty =$

$\max\left\{|f_n(0) - 1|, \sup_{t\in(0,1]} |f_n(t)|\right\}$

$= \sup\{|f_n(t)| \mid t \in (0,1]\} = 1.$

Also konvergiert die Folge nicht bezüglich der $\|\ \|_\infty$

$\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}.$

$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}.$

Also konvergiert f_n bezüglich $\|\ \|_1$ gegen 0.

Der Satz 1.47 erlaubt uns jeden metrischen Raum zu vergrößern, so dass er dann vollständig ist.

Ein einfaches Beispiel wäre

$(0,1)$ ist nicht vollständig.

Dann ist der Abschluss $[0,1]$ die Vervollständigung.

$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge konvergiert nicht, also füge nur den Grenzwert zu.

$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ dito.

$$\left|\left(d(x,z)-d(x_0,z)\right)-\left(d(y,z)-d(x_0,z)\right)\right|$$
$$=\left|d(x,z)-d(y,z)\right|$$

isometrisch heißt

$$d(x,y) = d(\overline{I}(x), \overline{I}(y))$$

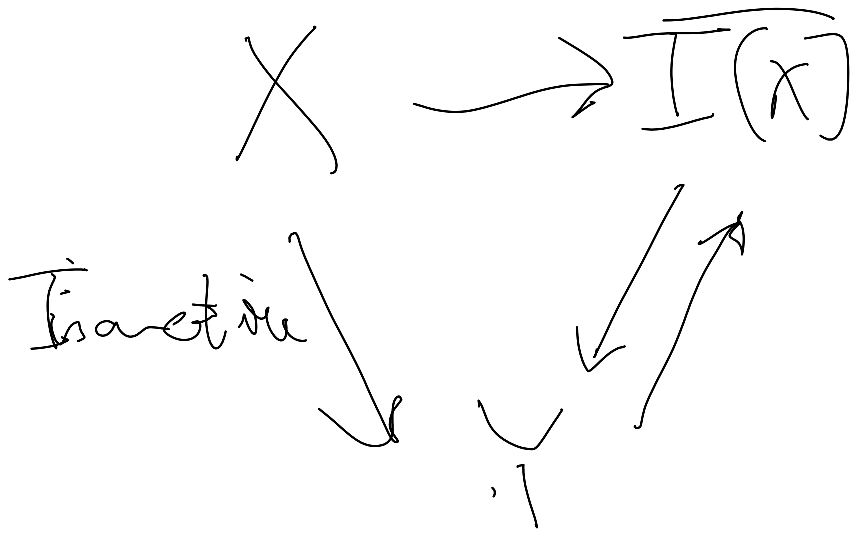
für alle $x,y \in X$

\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "I"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{I(X)} \subset C_b(X,\mathbb{R}) \arrow[d, "g"] \\
& Y
\end{tikzcd}

g ist eine Fortsetzung auf den Abschluss von $\overline{I(X)}$ (also auf die Vervollständigung)

Diese Eigenschaft folgt sofort daraus, dass die Vervollständigung in einem bestimmten Sinne eindeutig ist, d.h. zwischen 2 Vervollständigungen isometrisch untereinander identi.

identifizieren.



$$\max\{f,g\} : X \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}.$$

$$\overline{A} \to \overline{A}, \quad f \mapsto |f|$$

$$f \in A \Rightarrow |f| \in \overline{A}$$

Um dies auch für $f \in \overline{A}$ zu beweisen, denn $|f| \in \overline{A}$