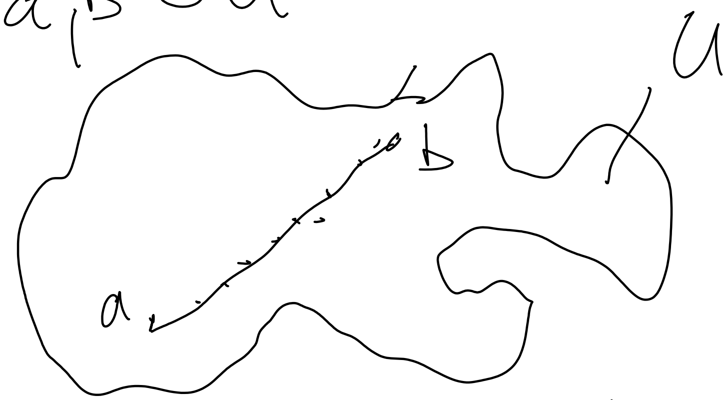
Induktion: Beweis einer Aussage
über $\mathbb{N}$. Beginn mit 1 und
zeige dann für Zahlen größer als 1 der Reihe nach

Kontinuierliche Induktion:
Beweis über eine Aussage aller
reellen Zahlen in einem Intervall
Beginn mit dem linken Rand
des Intervalls also der
kleinsten Zahlen und
zeige von dem Bereich,
für den die Aussage gezeigt
ist durch kleine Umgebung vom
rechten Rand des Intervalls
für das nun ergänzt

Induktionsschritt: Man
nimmt an die Aussage
ist für ein Intervall gezeigt

und zeigt, dass man die rechte Intervallgrenze vergrößern kann.

$a, b \in U$



$t \to a + t(b-a) = (1-t)a + tb$

beschreibt die Gerade durch a und b.

$S \subset D$ abzählbar

$f: U \to Y \quad U \subset X$ offen

in $x_0 \in U$ diff'bar

$f'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$.

$f': U \to \mathcal{L}(X, Y)$

$f''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$

Beispiel 10.3 (iii)

$f : I \to Y$

Wir kamen in diesem Fall

$f' : I \to Y$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}, Y) \simeq Y.$

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$$

für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = x$,

Seien $a_1, \dots, a_3 \in Y$

$f : t \mapsto t a_1 + t^2 a_2 + t^3 a_3$

$t_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = $$

$$= \frac{t a_1 + t^2 a_2 + t^3 a_3 - (t_0 a_1 + t_0^2 a_2 + t_0^3 a_3)}{t - t_0}$$

$$\frac{t - t_0}{t - t_0} a_1 + \frac{(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} a_2 + \frac{(t^3 - t_0^3)}{t - t_0} a_3$$

$$= a_1 + (t + t_0) a_2 + (t^2 + t t_0 + t_0^2) a_3$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = a_1 + 2 t_0 a_2 + 3 t_0^2 a_3$$

Sei X ein Banachraum.

Polynom in $\mathcal{L}(X)$.

$A \mapsto a_0 + a_1 A + a_2 A^2$.

$A \mapsto A^3$ ableiten?

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$A \mapsto A \quad : \quad \mathbb{1}_{\mathcal{L}(X)}$ linear

$\Rightarrow$ Ableitung ist bei alle $A \in \mathcal{L}(X)$ gleich $\mathbb{1}_{\mathcal{L}(X)}$

$A \cdot A = \mathbb{1}_{\mathcal{L}(X)} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{L}(X)}$

$\Rightarrow (A^2)' \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(X))$

$\overset{?}{=}$;

$\mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$

$B \mapsto B \cdot A + A \cdot B$

$A^3 := A^2 \cdot A$

$(A^3)'(B) = (B \cdot A + A \cdot B) \cdot A$

$+ A^2 \cdot B$

$$= B \cdot A^2 + A \cdot B \cdot A + A^2 \cdot B$$