Beweis von Satz 9.37

1. es genügt zu zeigen, dass die gegebene Norm $\| \ \|$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent zu der Norm $\| \ \|_1$.

2. Wir zeigen im Folgenden

$$C\|v\|_1 \leq \|v\| \leq \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}\|v\|_1$$

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0, \overset{i\text{ter Eintrag}}{1}, 0, \dots, 0}_{n \text{ Einträge}})$$

$i = 1, \dots, n$ für ein $C > 0$.

Für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

$$\left(\|v\|_1 \leq \frac{1}{C}\|v\|\right)$$

$$\Rightarrow \|v\| = \|v_1 e_1 + \dots + v_n e_n\|$$

$$\leq \|v_1 e_1\| + \dots + \|v_n e_n\| = |v_1|\|e_1\| + \dots + |v_n|\|e_n\|$$

$\le |v_1| \cdot M + \dots + |v_n| \cdot M$ mit

$\left(M = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}\right)$

$\le (|v_1| + \dots + |v_n|) M = \|v\|_1 \cdot M$

Wir betrachten jetzt $\{v \in K^n \mid \|v\|_1 = 1\}$ als Teilmenge von $(K^n, \|\cdot\|_1)$:

In den normierten Vektorräumen sind die beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen kompakt. Die obige Teilmenge ist beschränkt und abgeschlossen?

Die Abb. $K^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|_1$ ist stetig. Die obige Teilmenge ist das Urbild von $\{1\} \subset \mathbb{R}$. $\{1\} = [1,1]$ ist abgeschlossen. Also ist die Teilmenge

Dann ist sie kompakt.

Wir zeigen jetzt, dass auf dem

$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ die Abb. $v \mapsto \|v\|$ auch stetig ist. Die schon gezeigte Ungleichung impliziert, dass diese Abb. sogar Lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonst. M:

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v-w\| \leq M \|v-w\|_1.$$

Da nimmt die Funktion $v \mapsto \|v\|$ auf der obigen kompakten Menge $\{v \in \mathbb{K}^n \mid \|v\|_1 = 1\}$ ein Minimum C an. $C > 0$.

$$C \cdot \|v\|_1 \leq \left\| \frac{v}{\|v\|_1} \right\| \cdot \|v\|_1 = \|v\|$$

$$\left\| \frac{v}{\|v\|_1} \right\|_1 = \frac{\|v\|_1}{\|v\|_1} = 1$$

$$(B(x,\varepsilon))_{x \in X}$$

$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ für alle $x,y \in \mathbb{K}^n$

zu alle $1 \leq p \leq \infty$.

$p = 1$, und $p = \infty$.

$$\|x+y\|_1 = |x_1+y_1| + \dots + |x_n+y_n|$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n|$$

$$= |x_1| + \dots + |x_n| + |y_1| + \dots + |y_n|$$

$$= \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

$$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, \dots, |x_n+y_n|\}$$

$$\leq \max\{|x_1|+|y_1|, \dots, |x_n|+|y_n|\}$$

$$\leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$$

$$= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Sei jetzt $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$1 < q < \infty$.

$\|x+y\|_p^p$

$|x_1| \cdot |x_1+y_1|^{p-1} + \ldots + |x_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1}$

$|y_1| \cdot |x_1+y_1|^{p-1} + \ldots + |y_n| \cdot |x_n+y_n|^{p-1}$

$(|x_1|, \ldots, |x_n|) \cdot (|x_1+y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n+y_n|^{p-1})$

$(|y_1|, \ldots, |y_n|)$.

$\leq \|(|x_1|, \ldots, |x_n|)\|_p \; \|(|x_1+y_1|^{p-1}, \ldots, |x_n+y_n|^{p-1})\|_q$

$\|(|y_1|, \ldots, |y_n|)\|_p$

$\|x\|_p$