$$\|g_n - g_m\|_1 = \int |g_n - g_m|\, d\mu$$

$$= \begin{cases} \int (g_n - g_m)\, d\mu & \text{für } n \geq m \\ \int (g_m - g_n)\, d\mu & \text{für } n \leq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int g_n\, d\mu - \int g_m\, d\mu & \text{für } n \geq m \\ \int g_m\, d\mu - \int g_n\, d\mu & \text{für } n \leq m \end{cases}$$

$$= \left| \int g_n\, d\mu - \int g_m\, d\mu \right|$$

Eine Teilmenge $A \subset B$ eines metrischen Raumes liegt in einer Menge B dicht, wenn $A \supset B$, d.h. jedes Element ist Grenzwert einer Folge in A.

Jedes Element von $L^1(O)$

ist Grenzwert einer Folge von

Treppenfunktionen, deren Quader

kompakte Teilmenge von O sind.

$$\| A_n \circ (\Phi^{-1})'(x) - I \| \le \frac{\varepsilon}{2} \, \| \Phi^{-1\prime}(x) \| \le \varepsilon$$

$$\| A_n \circ \Phi^{-1\prime}(x) - I \| = \| (A_n - \Phi'(\Phi^{-1}(x)))(\Phi^{-1\prime}(x)) \|$$

$$\le \| A_n - \Phi'(\Phi^{-1}(x)) \| \cdot \| \Phi^{-1\prime}(x) \|$$

Beispiel 17.39 (i)

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, so

dass ∇f keine gemeinsame Nullstelle

hat f hat.

D.h. Auf der Niveaumenge $f^{-1}[\{0\}]$ ist ∇f nicht Null

d.h. für alle $x \in f^{-1}[\{0\}]$ ist mindestens eine partielle Ableitung von

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Deshalb ist

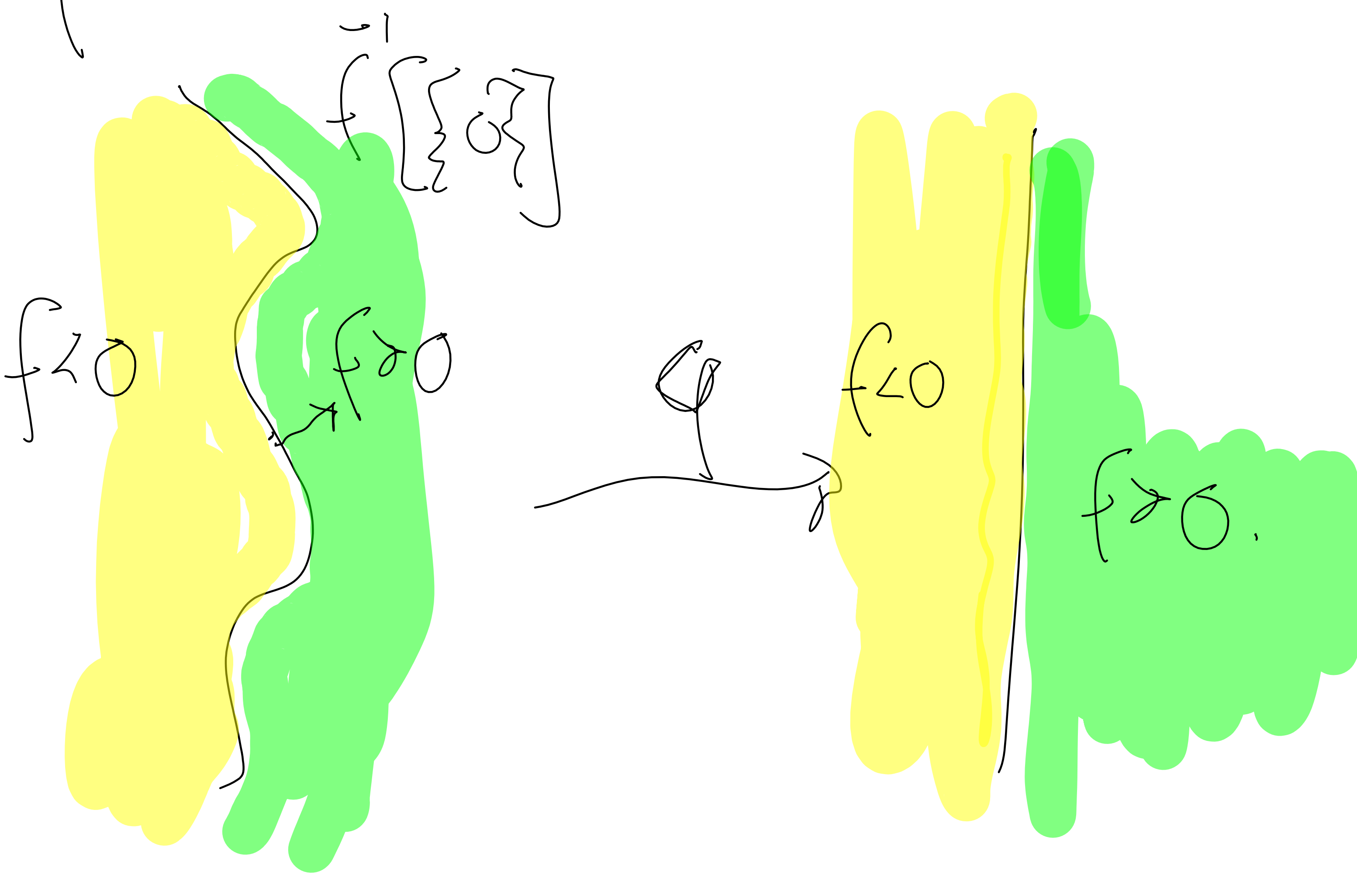
$f^{-1}[\{0\}]$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$, im Sinne der Definition 11.12

Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) < 0\}$

Dann ist $\overline{\Omega} \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq 0\}$

weil die rechte Menge eine abgeschlossene Menge ist, die Ω enthält.

Weil $f^{-1}[\{0\}]$ eine Untermannigfaltigkeit ist, gibt es Karten, die diese Untermannigfaltigkeit lokal auf eine Hyperebene abbilden. Auf einer Seite von der Hyperebene ist $f > 0$ und auf der anderen Seite $f < 0$.



Dann ist jeder Punkt von

$f^{-1}[\{0\}]$ Grenzwert einer Folge

in $f^{-1}[(-\infty, 0)] = \Omega$.

$\Rightarrow f^{-1}[\{0\}] = \partial\Omega$.

Die Äußere Normale ist ein Vektor

1.) es steht senkrecht auf die Tangentialebene

2.) es zeigt nach außen, also in den grünen Bereich hin

3.) es hat die Länge eins.

∇f steht senkrecht auf dem

Tangentialebene.

$$\nabla f(x) \cdot \nabla f(x) \geq 0.$$

Also ist die Ableitung lang

$\nabla f \geq 0. \Rightarrow$ Also zeigt

∇f in den grün Bereich

$\Rightarrow \dfrac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist die äußere Normale

Tangentialraum an die Hyperebene besteht aus den Kern von $f'(x)$

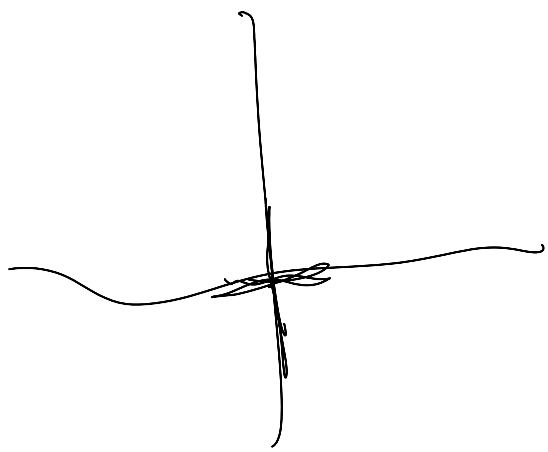
$$= \{ y \in \mathbb{R}^d \mid y \cdot \nabla f(x) = 0 \}$$

Wegen des Satzes der impliziten Funktion gibt es für jeden y aus dem Tangential

Für ein stetig diff'b. Abb. $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$

mit $z(t) \in f^{-1}[\{0\}]$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

und $\dot{z}(0) = y$



Tangentenkegel

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\, d\mu$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) N_i(x)\, d\sigma - \int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, d\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x) g(x)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)$$

Wir betrachten die Funktion

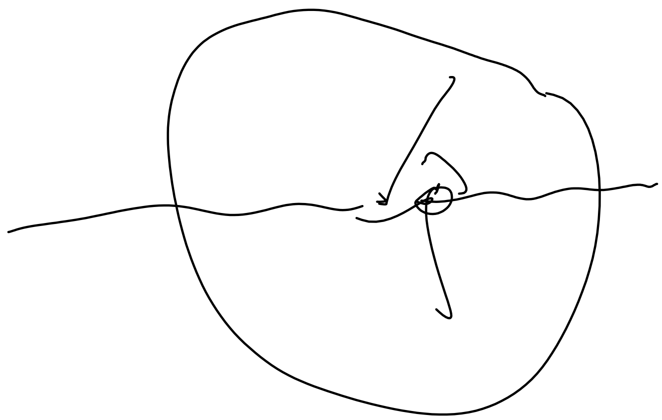
$$h : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$h(x) = (0, \ldots, \underbrace{f(x) g(x)}_{i\text{-te Komponente}}, \ldots 0)$$

$$\nabla h(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x) g(x)\right).$$

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\, g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right) d\mu$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(x)\, g(x)\, N_i(x)\, d\sigma(x)$$



$B(0,1) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$\varphi \to e^{i\varphi} \qquad \varphi \in [0, \pi]$

$\varphi \in [\pi, 2\pi]$

$\frac{dz}{z} \qquad z = x + iy$

Definition 12.37

Eine Zerlegung der Eins bezieht sich auf eine offene Überdeckung.

d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen,
und eine offene Überdeckung von Ω
d.h. U ist eine Menge von offenen Teilmengen der Ω, deren Vereinigung gleich Ω ist.

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ ein dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f \in C(A, \mathbb{R})$, die außerhalb einer kompakten $K \subset A$ verschwindet.

Dann gibt es für jedes $x \in K$ eine offene Teilmenge $O_x \subset \mathbb{R}^d$

So dass $O_x \cap A = \varphi[U]$.

Weil K kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung von K durch die Mengen $(O_x)_{x \in K}$ eine endliche Teilüberdeckung.

D.h. wir haben endlich viele Mengen O_i die K überdecken so dass jeder $O_i \cap A = \varphi_i[U_i]$.

Dann gibt es eine Zerlegung der Eins zu

$\Omega = O_1 \cup \ldots \cup O_N$. Wir betrachten nun die Werte auf K.

Wegen der lokalen Endlich-
keit der Zerlegung der Eins,
gibt es für jeden $x \in K$ eine offene
Umgebung V_x von x, auf der nur
endlich viele der h_n's ungleich Null
sind. Die Überdeckung
von K durch $(V_x)_{x \in K}$ besitzt
wieder eine endliche Teilüberdeckung.
Da sind also auf der Vereinigung
von endlich vielen der V_x
nur endlich viele h_n's ungleich
Null. Die endlich vielen V_x
überdecken K. Deshalb
spielen nur endlich viele der h_n's
für uns eine Rolle.