

$A \subset \mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^{d+1}$

Wie wird das Volumen definiert
als $\int \chi_A d\mu$. Das ist die
Definition für $A \subset \mathbb{R}^d$.

Wenn A eine Menge ist,
die zwischen $\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$
und der Graphen von $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Dann
$$\text{Vol}(A) = \int f d\mu$$

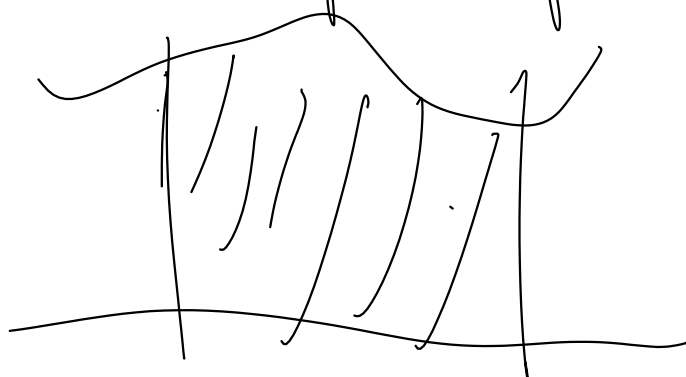
Das zweite Herausgekommen wäre bei
folgendem Problem:

Ein "Seil" in $\mathbb{R}^n$ der

Phase A ist nun vorgegeben als
 $\mathbb{R}^1 \times \{0\}$ (Hyperebene



Ein weiteres Problem ist der
 Rand der Phase offen.



$\int X_A d\mu$ bedeutet gewissermaßen
 ein Volumen in $\mathbb{R}^{d+1}$



Messbare Mengen sind natürlich
 große Teile der Potenzmenge
 auf der wir in Volumen mit
 der vollen Eigenschaft definieren
 können.

Bei der Maßtheorie definiert man
zweit die Volumenzerlegung.

Dazu facht man folgende Bedingung

Die Zerlegung der Potenzmenge soll
folgende Eigenschaften haben
(σ -Algebra)

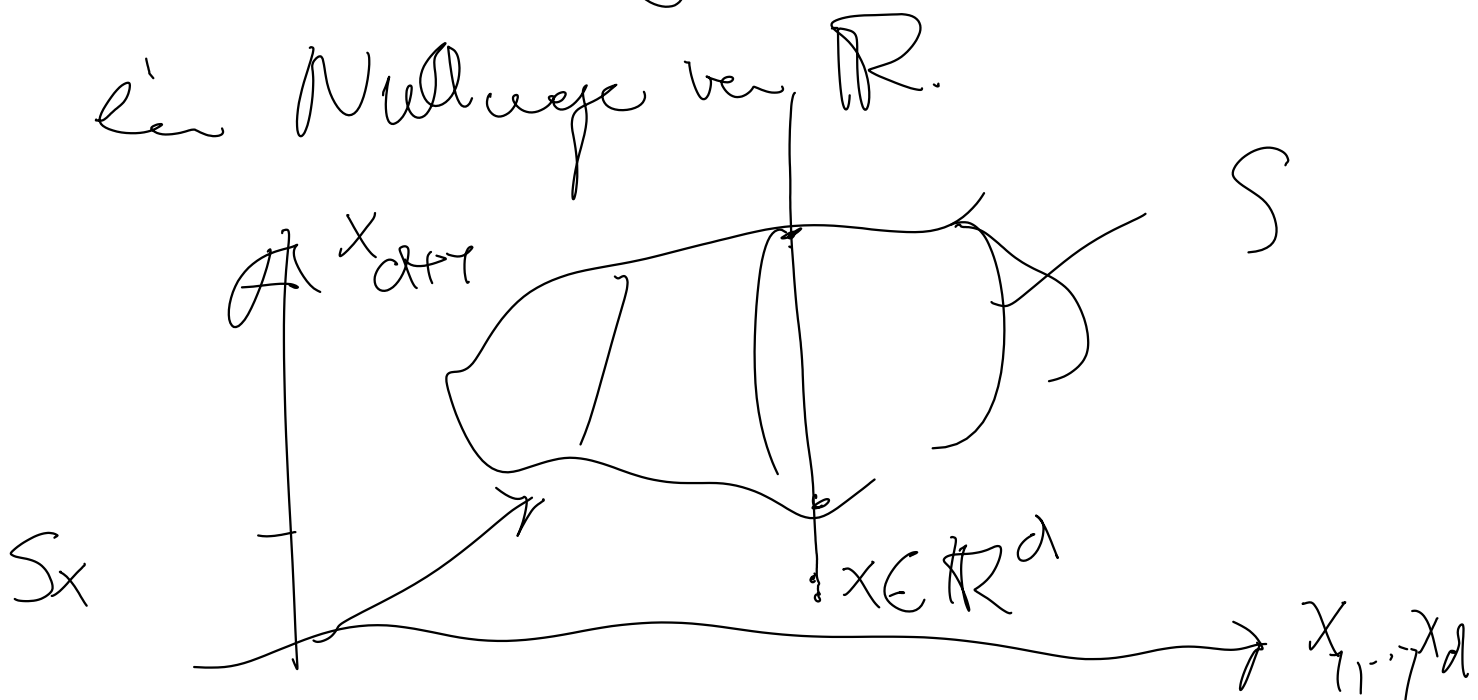
Das Komplement einer Menge in
der σ -Algebra soll wieder in der
 σ -Algebra sein. un abzählbar
Vereinigung bzw. Schnitt.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

für paarweise disjunkte Teilmengen von
 A_n .

Lemma 12.25 $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ist eine Null-
menge. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$
d.h. in Komplement der Nullmenge von $\mathbb{R}^d$
ist $S_x = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in S\}$

ein Nullmenge von $\mathbb{R}$.



In der Beweis benutzt man das Satz
12.10. Das ist die einzige Stelle an
der der Satz 12.10 benutzt wird.
Der Satz 12.10 besagt, dass es für
jede Nullmenge $S \subset \mathbb{R}^d$ gilt es

ein monoton w. F. v. T. f. m. b.
 $h. (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die auf S nicht
 konvergiert. D.h. die Menge aller
 Punkte, an der $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht kon-
 vergiert, enthält S .

$f \rightarrow \int f d\mu(y)$ ist monoton
 und erhält das Integral.

Deshalb ist die auch

$\int f_n d\mu(y)$ ist monoton wachsend
 Folge von T. f. m. b. l.

D.h. sie konvergiert außerhalb in
 Nullmenge S

Wann $x \in \mathbb{R}^d \setminus \hat{S}$

Der Kernsepal $\int f_n(x, y) d\mu(y)$

$y \mapsto f_n(x, y)$ ist eine Treppenfunktion

auf $\mathbb{R}$. Also bilden diese Folge

ein m. w. F., v. T. f. k. b. s. i. auf $\mathbb{R}$.

Der Kernsepal $y \mapsto f_n(x, y)$

ist eine in Nullmenge $\hat{S}_x \subset \mathbb{R}$

Auf $y \in \hat{S}_x$ Kernsepal besteht

$f_n(x, y)$ nicht, bzw. kein

$y \mapsto f_n(x, y)$ nicht Kernsepal,
der heißt $y \in \hat{S}_x$

Auf S linearf. ja für nicht
 $\Rightarrow$ Für alle $y \in S_X$,

d.h. $f_n(x, y)$ linear nicht
gibt $y \in S_X \Rightarrow S_X \subset S_X$

Wenn S_X ein Nullvektor ist
und S_X ein Nullvektor.

Also gibt das für alle
 $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$ ist S_X ein Nullvektor

$$f \mapsto \int f d\mu(y)$$

$$f \sim g \mapsto \int f d\mu(y) \sim \int g d\mu(y)$$

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall.

$\Rightarrow$ es gilt in Nullmenge

$\hat{S} \subset \mathbb{R}^d$, so dass für
alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \hat{S}$

$$\int f(x, y) d\mu(y) = \int g(x, y) d\mu(y)$$

Dann folgt, dass

$y \mapsto f(x, y)$ und $y \mapsto g(x, y)$
sind für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \hat{S}$ in auf
in Nullmenge S_x übereinstimmen.

Dabei ist S_x

D.h. wir sollen sicherstellen, dass
für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$

$y \mapsto f(x, y)$ und $y \mapsto g(x, y)$
äquivalent sind.

D.h. dass die Menge

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^d \mid (x, y) \in S\}$$

in Nullmenge ist.

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_\infty} = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\|_p$$

$$\|x\|_\infty \neq 0 \quad = \left\| \left(\frac{x_1}{\|x\|_\infty}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|_\infty} \right) \right\|_p$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^2}{1+x_i^2} \right)^p \right)^{1/p}$$

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(1, 1) \in A$$

$$(0, 0) \notin A$$



Die Menge ist nicht offen.

Also kann sie nicht abgeschlossen

sein.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) = (0, 0).$$

Wegen $(0, 0)$ nicht in der Menge liegt

ist sie nicht abgeschlossen.

Lemma 9.19

$$(0,0) \cup \mathbb{R}^2.$$

Beispiel 9.28 (iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) = (0,0)$$

Dar folgt, dass die Menge
kompakt ist und deshalb abgeschlossen.

Wir zeigen dass $\{a_n\} \cup \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
kompakt ist.

Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Folge in der
Menge. Da gibt es zwei Möglichkeiten
 $b_n = a_{m_n}$ für $m_n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Sei } A = \bar{g}^{-1}[\{g(x_0)\}].$$

Bestimme alle lokale Extremwerte
in f .

Alle möglichen Kandidaten für
lokale Extremwerte sind

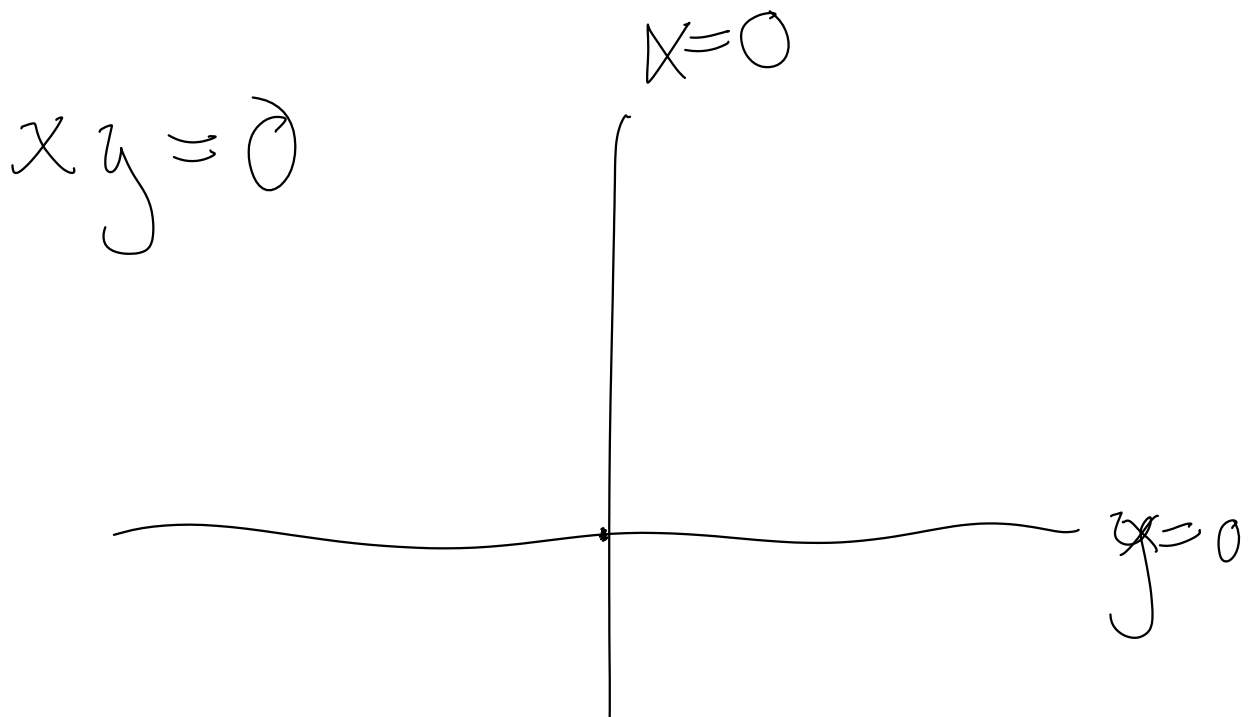
1.) Punkte an denen A stetig diff'bar
ist die die Lagrange Bed.
erfüllen.

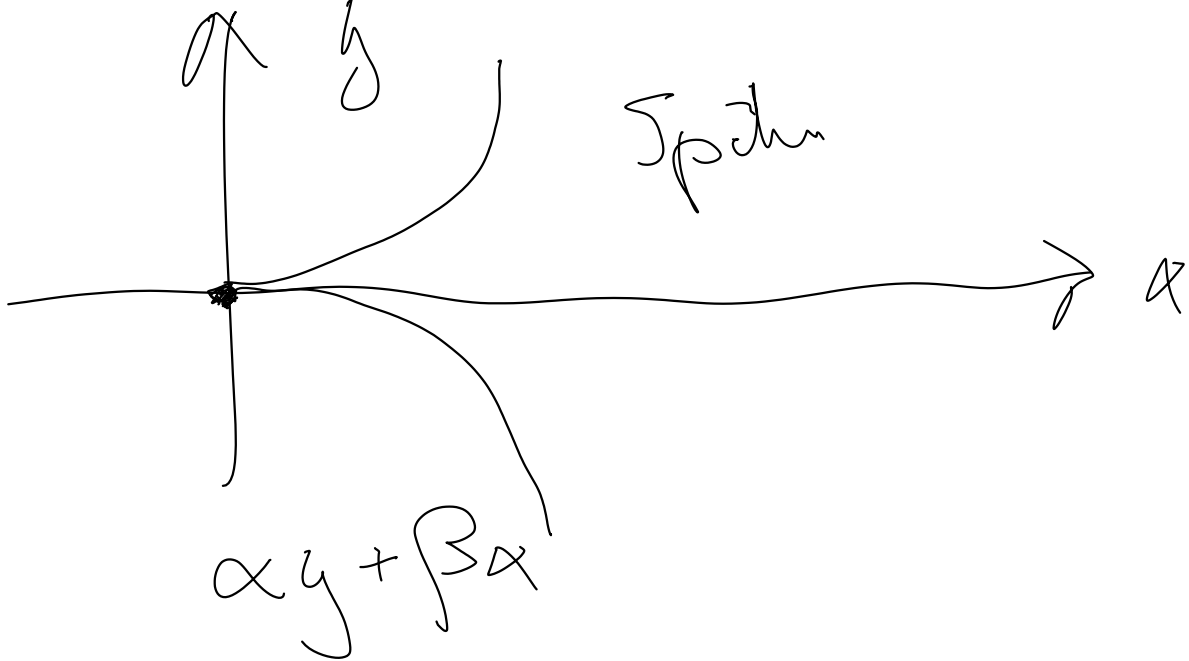
2.) Punkte an denen A nicht
stetig diff'bar ist.
gegebenfalls mit dem Rang test
prüfen.

Um dies festzustellen, ob es solche
Punkte bei lokalen Extremwerten

ist haben in der Methode
 berücksichtigt. In der zu bestrafen
 musste in die Menge A (obal
 bei der Extremwerte, unteren
 und den entscheiden ob sie zu
 atmen ist.

Es gibt z.B. Doppelpunkte
 A ist doch die Vereinigung von
 zwei Teilmengen, die beide
 an den Punkt Unabhängig-
 keit sind. d.P





$$\phi: U \rightarrow \mathbb{A}$$

f

$$f \circ \phi$$

f'' ist ein symmetrischer Bilinear

form auf $\mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^n$ in $g'(x)$ definiert ein
Vektor in $\mathbb{R}^n$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Wen Sw $A = g^{-1}[\{g(x_0)\}]$

Let x_0 strictly deft.

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad g'(x_0) \neq 0.$$

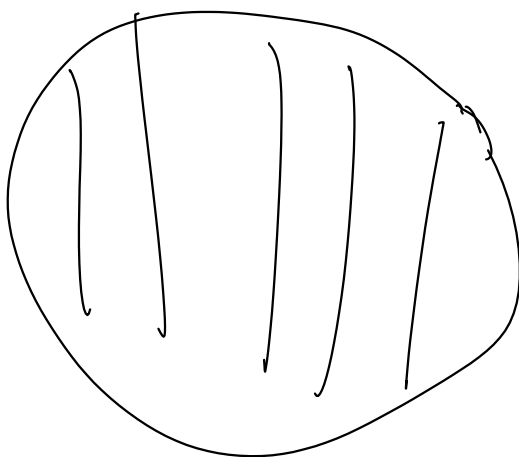
$$\Rightarrow A =$$

$$h = (g(x) - g(x_0))^2$$

$$h^{-1}[\{0\}] = A.$$

$$\nabla h(x_0) = 0$$

$$\nabla h(x) = 2(\nabla g(x))(g(x) - g(x_0)) = 0$$



$$f(x, y)$$