Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II
Abschlußklausur

03.07.2021

LÖSUNGEN:

1. Ableitung.

(a) Für jedes konstante $x \in \mathbb{R}$ ist $y \mapsto |x| \cdot y^2$ ein Polynom in y mit dem Koeffizienten $|x|$, also bei allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ partiall nach y differenzierbar.
(1P) für die Menge der Punkte, bei denen f partiell nach y differenzierbar ist.
(1P) für die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2|x| \cdot y$.

(b) Für jedes konstante $y \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto f(x, y) = y^2 \cdot |x|$ eine Konstante mal der Betrag von x. Deshalb ist es nach dem Hinweis für $x = 0$, $y \neq 0$ nicht differenzierbar.
(1P) für $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existiert bei $x = 0$ nicht.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y^2 & \text{wenn } x > 0 \ \text{(1P) für } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ bei } x > 0. \\ -y^2 & \text{wenn } x < 0 \ \text{(1P) für } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ bei } x < 0. \end{cases}$$

(c) (1P) für $f(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$,
ODER: wir benutzen den Differenzenquotienten und bemerken, dass der Zähler Null ist

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h| \cdot 0 - 0}{h} = 0.$$

Genauso (1P) für $f(0, y) \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ oder

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0| \cdot h^2 - 0}{h} = 0.$$

(d) Wenn f in $(0, 0)$ differenzierbar ist, dann ist die Ableitung das Matrix von partiellen Ableitungen. Die Frage ist: geht der Differenzenquotienten gegen Null?

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|f(h, k) - f(0, 0) - A \cdot (h, k)\|}{\|(h, k)\|_1} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - (0, 0) \cdot (h, k)|}{\|(h, k)\|_1} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \cdot k^2}{|h| + |k|} \\ &\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h| \cdot k^2}{|h|} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} k^2 \to 0. \end{aligned}$$

Daher f ist in $(0, 0)$ differenzierbar.
(1P) für f ist in $(0, 0)$ differenzierbar.
(1P) dafür, dass die Ableitung im Differenzenquotienten Null gesetzt wird.
(1P) für eine Abschätzung, aus der die Differenzierbarkeit folgt.
Alternativ: (3P) f ist bei $(0, 0)$ differenzierbar weil $\frac{\partial f}{\partial y} = 2|x|y$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist und $\frac{\partial f}{\partial x}$ bei $(0, 0)$ existiert.

2. Extremwertsuche

(a) Weil $x^2 \geq 0$, ist $y^3 - y^4 \geq 0 \Rightarrow y^3(1-y) \geq 0$.
Für $y < 0$ ist $y^3 - y^4 < 0$. Für $y \in (0,1)$ ist $y^3 - y^4 > 0$. Für $y > 1$ ist $y^3 - y^4 < 0$. Also $0 \leq y \leq 1$.
Nach $0 \leq y \leq 1$, folgt $y^3 - y^4 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$. Daher $-1 \leq x \leq 1$.
(1P) wenn in iergendeiner Form $x^2 \geq 0$ erkannt wurde.
(1P) wenn in iergendeiner Form verstanden wurde, dass $y \in [0,1]$ aus $y^3 - y^4 \geq 0$ folgt.
(1P) wenn in iergendeiner Form verstanden wurde, dass $x^2 \leq 1$ aus $y \in [0,1]$ folgt.

(b) g ist stetig, $\{0\} \subset \mathbb{R}$ ist geschlossen. Weil $M = g^{-1}[\{0\}]$ das Urbild von einer abgeschlossen Menge unter einer stetigen Funktion ist, folgt, dass M auch abgeschlossen ist.
M ist geschlossen und wegen (a) beschränkt, also kompakt.
(1P) für M ist abgeschlossen und beschränkt.

(c) M ist nicht stetig differenzierbar, wenn $\nabla g = 0$.
(1P) dafür dass ∇g gleich Null gesetzt wird.
(1P) für die Ableitung $\nabla g = (2x, -3y^2 + 4y^3)$.
Aus der ersten Komponente folgt $x = 0$. Wegen der zweiten gilt $y = 0$ oder $y = 3/4$. $g(0, 3/4) \neq 0$, also liegt $(0, 3/4) \notin M$. $g(0,0) = 0$, also ist $(0,0) \in M$ die (einzige) Singularität.
(1P) allein für die Bestimmung der Singularität bei $(0,0)$

(d) Wir müssen $\nabla f = \lambda \nabla g$ lösen.
(1P) für die Ableitung $\nabla f = (0,1)$.
(1P) für das Hinschreiben dieses Gleichungssystems $0 = \lambda 2x$ und $1 = \lambda(-3y^2 + 4y^3)$.
Die erste Komponente ergibt $0 = \lambda \cdot 2x \Rightarrow x = 0$ oder $\lambda = 0$. Für $x = 0$ wissen wir $y = 0, 1$ weil $g(x,y) = 0$ gilt. $(0,0)$ ist schon ein Singularität. $y = 1$ gibt einen kritischen Punkt $(0,1)$. Für $\lambda = 0$ gibt es keine Lösungen.
(1P) für das richtige Umformen des Gleichungssytems.
(1P) für das Bestimmen der Lösung $(0,1)$.
Wir müssen nur die beiden Punkte $(0,0)$ und $(0,1)$ überprüfen:
(1P) für Maximum bei $f(0,1) = 1$
(1P) für Minimum bei $f(0,0) = 0$.

3. Satz der impliziten Funktion

(a) (1P) für die Berechnung der Ableitung von F: $\nabla F(x, y) = (1, \sin y)$.
(1P) dafür dass die Bedingung $\frac{\partial F}{\partial} y \neq 0$ erkannt wird.
Das ergibt $\sin y \neq 0 \Rightarrow y \notin \pi\mathbb{Z}$, also bei $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in M, y \notin \pi\mathbb{Z}\}$ ist y wegen dem Satz der impliziten Funktion lokal eine Funktion von x.
(1P) für $y \notin \pi\mathbb{Z}$.
$F(1, 0) = 1 - \cos 0 = 0 \Rightarrow (1, 0) \in M$ aber $\sin 0 = 0$
(1P) dafür, dass $(1, 0)$ nicht zu der in (a) bestimmten Menge gehört.

(b) Wegen (a) erfüllt die Funktion $y(x)$ die Gleichung $x - \cos y(x) = 0$, also $\cos y(x) = x$.
(1P) dafür dass in iergendeiner Form $\cos(y(x)) = x$ erkannt wurde.

(c) Der Satz der impliziten Funktion bestimmt die Punkte (x_0, y_0), so dass die Funktion $y \mapsto y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ auf einer Umgebung von x_0 existiert. Hier existiert aber arccos nur für $x \leq 1$.
Alternativ reicht auch, dass arccos bei $x = 1$ nicht differenzierbar ist.
Alternativ reicht auch, dass der Satz der impliziten Funktion nur eine hinreichende Bedingung für die Existenz der impliziten Funktion ist, aber keine notwendige Bedingung.
(1P) wenn einer dieser Gründe oder ein anderer richtiger Grund genannt wird.

4. Integration.

(a) $u/v = (x^3/y)/(x^2/y) = x$

(1P) für die Bestimmung von x als Funktion von u und v.

Es folgt, dass $y = x^2/v = u^2/v^3$

(1P) für die Bestimmung von y als Funktion von u und v.

$\Phi^{-1}(u,v) = (u/v, u^2/v^3)$ und deshalb $\Phi^{-1} \circ \Phi(x,y) = (x,y)$. Überprüfe $\Phi \circ \Phi^{-1}(u,v) = \Phi(u/v, u^2/v^3) = ((u/v)^3/(u^2/v^3), (u/v)^2/(u^2/v^3)) = (u,v)$, also ist Φ bijektiv.

(1P) für den direkten Nachweis der Injektivität

(1P) für den direkten Nachweis der Surjektivität.

Alternativ (2P) wenn $\Phi(\Phi^{-1}(u,v)) = (u,v)$ berechnet wird.

Alternativ gibt es diese (2P), wenn direkt gezeigt wird, dass für $(x,y) \in (0,\infty)^2$ es genau ein $(u,v) \in (0,\infty)^2$ gibt mit $u = x^3/y$ und $v = x^2/y$.

(b) Diese Aufgabe konnte mit der Jacobische Transformationsformel für die Funktion $(u,v) \mapsto f(u,v) = e^{-v}/(1+u^2)$ und die Abbildung Φ gelöst werden:

(1P) für die Jacobimatrix Φ'.

(1P) für $|\det \Phi'|$:

$$|\det \Phi'| = \left|\det \begin{pmatrix} 3x^2y^{-1} & -x^3y^{-2} \\ 2xy^{-1} & -x^2y^{-2} \end{pmatrix}\right| = |-3x^4y^{-3} + 2x^4y^{-3}| = x^4y^{-3}.$$

Die Jacobische Formel ist $\displaystyle\int_{\Phi^{-1}[O]} (f \circ \Phi)\, |\det \Phi'|\, d\mu = \int_O f\, d\mu$. Also

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)}{1 + \left(\frac{x^3}{y}\right)^2} \frac{x^4}{y^3}\, dx\, dy &= \int_{\Phi^{-1}[(0,\infty)\times(0,\infty)]} \frac{\exp(-v(x,y))}{1+u(x,y)^2} |\det \Phi'|\, dx\, dy \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \frac{\exp(-v)}{1+u^2}\, du\, dv \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\exp(-v)}{1+u^2}\, du \right) dv \\
&= \int_0^\infty \exp(-v) \arctan(u)\Big|_0^\infty\, dv \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \exp(-v)\, dv = -\frac{\pi}{2} \exp(-v)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(1P) dafür dass im Exponenten v, im Nenner $1 + u^2$ und $|\det \Phi'|$ erkannt wurde.

(1P) für das Einsetzen der Jacobischen Transformationsformel in der zweiten Zeile.

(1P) für das Aufteilen in zwei eindimensionale Integrale

(2P) für das Berechnen der beiden eindimsneionalen Integrale.

Alternativ konnte die Aufgabe auch mit der Jacobischen Transformationsformel für die Funktion $(x,y) \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)}{1+\left(\frac{x^3}{y}\right)^2} \frac{x^4}{y^3}$ und die Abbildung Φ^{-1} gelöst werden. Dann gibt es die analogen Punkte:

(1P) für die Jacobimatrix $(\Phi^{-1})'$.

(1P) für $|\det(\Phi^{-1})'|$:

$$|\det(\Phi^{-1})'| = \left|\det\begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 2u/v^3 & -3u^2/v^4 \end{pmatrix}\right| = |-3u^2/v^5 + 2u^2/v^5| = u^2/v^5.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)}{1+\left(\frac{x^3}{y}\right)^2} \frac{x^4}{y^3}\, dx\, dy &= \int_{\Phi^{-1}[(0,\infty)\times(0,\infty)]} \frac{\exp(-v)}{1+u^2} \frac{(u/v)^4}{(u^2/v^3)^3} |\det(\Phi^{-1})'|\, du\, dv \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \frac{\exp(-v)}{1+u^2} \frac{u^2/v^5}{u^2/v^5}\, du\, dv \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{\exp(-v)}{1+u^2}\, du\right) dv \\
&= \int_0^\infty \exp(-v) \arctan(u)\Big|_0^\infty\, dv \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \exp(-v)\, dv = -\frac{\pi}{2}\exp(-v)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(1P) dafür dass im Exponenten v, im Nenner $1+u^2$ und $\frac{(u/v)^4}{(u^2/v^3)^3}$ eingesetzt wurde.

(1P) für das Einsezten der Jacobischen Transformationsformel in der zweiten Zeile.

(1P) für das Aufteilen in zwei eindimensionale Integrale

(2P) für das Berechnen der beiden eindimsneionalen Integrale.

(c) Da $\Phi(0, y) = (0, 0)$ ist Φ auf dieser Geraden nicht injektiv (1P).

5. Lineare Abbildung

(a) $A(x+h,x+h) = A(x,x+h) + A(h,x+h) = A(x,x) + A(x,h) + A(h,x) + A(h,h)$.
(1P) für die 4 Terme.

(b) Wir wissen schon, dass $B(x)$ linear ist. Wir müssen zeigen, dass $B(x)$ als eine lineare Abbildung beschränkt ist. Für jedes $x, y \in X$ gilt

$$|B(x)(y)| = |A(x,y)| \leq C\|x\| \cdot \|y\| = (C\|x\|) \cdot \|y\|,$$

(1P) dafür dass diese Ungleichung in iergendeiner auch indirekten Form erkannt wurde.
Also ist $B(x)$ beschränkt durch $C\|x\|$.
(1P) dafür, dass in iergendeiner Form erkannt wurde, dass aus der Ungleichung die Aussage folgt.

(c) Wir wissen schon, dass B linear ist.
Jetzt müssen wir $\|B\|_{op} \leq C$ zeigen. Das folgt nach (b) direkt, oder

$$\|B\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \{\|B(x)\|_{op}\} \leq \sup\{C\|x\| \mid \|x\| \leq 1\} = C.$$

(2P) dafür dass in iergdeiner Form erkannt wurde, dass aus (b) die Ungleichung folgt.

(d) Betrachte den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - (A(x,h) + A(h,x))|}{\|h\|} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{|A(x+h,x+h) - A(x,x) - A(x,h) - A(h,x)|}{\|h\|} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{|A(x,x) + A(x,h) + A(h,x) + A(h,h) - A(x,x) - A(x,h) - A(h,x)|}{\|h\|} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{|A(h,h)|}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{C\|h\|^2}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} C\|h\| = 0.
\end{aligned}$$

Weil der Differenzenquotienten gegen Null geht, ist die gegebene lineare Abbildung die Ableitung von f.
(1P) für das hinschreiben des Differenzenquotienten mit der richtigen Ableitung.
(1P) für die Abschätung des Differenzenquotienten.

(e) Weil die Ableitung $x \mapsto f'(x)$ in $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathbb{R}))$ liegt, ist sie eine lineare Abbildung. Die Ableitung einer linearen Abbildung ist konstant und bei allen Punkten gleich der linearen Abbildung selber. Daraus folgt die Aussage.
(1P) dafür, dass in iergendiener Form erkannt wird, dass f' linear ist.
(1P) dafür, dass erkannt wurde, dass daraus die Aussage folgt.
Alternativ (2P) für den direkten Nachweis:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{|f'(x+h)(v) - f'(x)(v) - f'(h)(v)|}{\|h\|} \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{|A(x+h,v) + A(v,x+h) - (A(x,v) + A(v,x)) - (A(h,v) + A(v,h))|}{\|h\|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|A(x,v) + A(h,v) + A(v,x) + A(v,h) - A(x,v) - A(v,x)) - A(h,v) - A(v,h)|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{\|h\|} = 0.
\end{aligned}$$