Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II
Abschlußklausur

03.07.2021

Bevor Sie beginnen beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50. Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen ab der ersten Aufgabe unten die Seitenzahlen 1–13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Sie dürfen bei jedem Aufgabenteil die Aussagen der anderen Aufgabenteile benutzen, auch wenn Sie die anderen Aufgabenteile nicht bearbeiten. Dadurch können Sie die Aufgabenteile unabhängig voneinander bearbeiten.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	2			
	(b)	3			
	(c)	2			
	(d)	3			
2	(a)	3			
	(b)	1			
	(c)	3			
	(d)	6			
3	(a)	4			**Note:**
	(b)	1			
	(c)	1			
4	(a)	4			
	(b)	7			
	(c)	1			
5	(a)	1			
	(b)	2			
	(c)	2			
	(d)	2			
	(e)	2			

1. Ableitung.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, |\cdot|, \quad (x, y) \mapsto |x| \cdot y^2$$

(a) Bestimme alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ an denen die partielle Ableitung nach y existiert, und berechne in diesen Punkten die partielle Ableitung. *(2 Punkte)*

(b) Bestimme alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ an denen die partielle Ableitung nach x existiert, und berechne in diesen Punkten die partielle Ableitung. *(3 Punkte)*

Hinweis. Man darf ohne Beweis benutzen, dass für jedes $a \neq 0$ die Funktion $t \mapsto a|t|$ in $t = 0$ nicht differenzierbar ist.

(c) Zeige, dass in $(0, 0)$ beide partielle Ableitungen existieren und Null sind. *(2 Punkte)*

(d) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar? Betrachte den Differenzenquotienten mit der Norm $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ auf $\mathbb{R}^2$. *(3 Punkte)*

---

2. Extremwertsuche.

(a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto x^2 - y^3 + y^4$ gegeben. Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3 - y^4\}$$

in $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ enthalten ist. *(3 Punkte)*

Hinweis. Zeige zuerst, dass auf der Niveaumenge $y^3 - y^4 \geq 0$ gilt.

(b) Begründe, warum die Menge M kompakt ist. *(1 Punkte)*

(c) Bestimme alle $(x, y) \in M$ bei denen M nicht stetig differenzierbar ist. *(3 Punkte)*

(d) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

hat als stetige Funktion auf der kompakten Menge M mindestens ein Maximum und mindestens ein Minimum. Bestimme die Koordinaten und die Funktionswerte von allen Maxima und Minima. *(6 Punkte)*

---

3. Satz der impliziten Funktion.

Seien

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - \cos y$$

und die Niveaumenge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$.

(a) Bestimme die Menge aller Punkte $(x, y) \in M$, bei denen M lokal der Graph einer Funktion $x \mapsto y(x)$ ist. Und zeige,dass $(1, 0) \in M$ nicht zu dieser Menge gehört. *(4 Punkte)*

(b) Begründe warum die lokalen Funktionen $x \mapsto y(x)$ in (a) Umkehrabbildungen von Cosinus sind. *(1 Punkt)*

(c) Der Graph von $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ enthält den Punkt $(1, 0)$. Wir wissen, dass $(1, 0) \in M$ liegt, aber nicht in der Menge von (a). Warum widerspricht das nicht dem Satz der impliziten Funktion? *(1 Punkt)*

---

4. Integration.

Sei

$$\begin{aligned}\Phi :& \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ &(x,y) \mapsto (u,v) \text{ mit } u = \frac{x^3}{y}, v = \frac{x^2}{y}\end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Einschränkung von Φ auf $(0,\infty) \times (0,\infty)$ eine bijektive Abbildung nach $(0,\infty) \times (0,\infty)$ ist, und bestimme die Umkehrabbildung. *(4 Punkte)*

(b) Bestimme

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{y}\right)}{1 + \left(\frac{x^3}{y}\right)^2} \frac{x^4}{y^3} \, dx \, dy.$$

(7 Punkte)

Hinweis $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(c) Begründe, warum die Jacobische Transformationsformel nicht auf die Abbildung Φ auf ganz $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ angewandt werden kann. *(1 Punkt)*

---

5. Lineare Abbildung.

Sei X ein normierter Vektorraum und $A : X \times X \to \mathbb{R}$ bilinear so dass $|A(x,y)| \leq C \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ gilt. Sei B die Abbildung von X in die linearen Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$ mit $x \mapsto (y \mapsto A(x,y))$. Im Skript wird gezeigt, dass B eine lineare Abbildung ist.

(a) Verwandle mit Hilfe der Bilinearität von A den Ausdruck $A(x+h, x+h)$ in eine Summe von vier Ausdrücken. *(1 Punkt)*

(b) Zeige, dass $B(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ für alle $x \in X$ gilt, wobei die Operatornorm von $B(x)$ beschrankt ist durch $\|B(x)\|_{op} \leq C\|x\|$. *(2 Punkte)*

(c) Zeige mit Hilfe von (b), dass $B \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathbb{R}))$ giltwobei die Operatornorm von B beschrankt ist durch $\|B\|_{op} \leq C$. *(2 Punkte)*

(d) Sei $f : X \to \mathbb{R}, f(x) := A(x,x)$. Wegen (a) ist $v \mapsto A(x,v) + A(v,x)$ für jedes $x \in X$ eine Abbildung in $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Begründe, warum f bei allen $x \in X$ differenzierbar ist, wobei die Ableitung $f'(x) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ gleich dieser Abbildung $v \mapsto A(x,v) + A(v,x)$ ist. *(2 Punkte)*

Hinweis. Betrachte den Differenzenquotienten und benutze (a).

(e) Begründe warum f zweimal differenzierbar ist mit $f''(x)(v,w) = f'(w)(v)$ für alle $x, v, w \in X$. *(2 Punkte)*
