Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II
Abschlußklausur, 2. Termin

03.09.2021

Bevor Sie beginnen beachten Sie bitte folgendes:

- Bitte unterschreiben Sie die Klausur auf dem Deckblatt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50. Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen ab der ersten Aufgabe unten die Seitenzahlen 2–12 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Sie dürfen bei jedem Aufgabenteil die Aussagen der anderen Aufgabenteile benutzen, auch wenn Sie die anderen Aufgabenteile nicht bearbeiten. Dadurch können Sie die Aufgabenteile unabhängig voneinander bearbeiten.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift, Rotstift oder radierbaren Kugelschreiber/Tintenroller zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich* und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zur Lösung jeder Aufgabe gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.

Viel Erfolg!

Aufgabe		mgl. Punkte	erreichte Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	2		
	(b)	4		
	(c)	2		
	(d)	3		
2	(a)	2		
	(b)	1		
	(c)	3		
	(d)	7		
3	(a)	3		**Note:**
	(b)	3		
	(c)	1		
4	(a)	4		
	(b)	2		
	(c)	4		
5	(a)	3		
	(b)	3		
	(c)	1		
	(d)	2		

1. Ableitung.

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^2} \cdot y$$

(a) Bestimme alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, an denen die partielle Ableitung nach y existiert, und berechne in diesen Punkten die partielle Ableitung nach y. *(2 Punkte)*

(b) Bestimme alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, an denen die partielle Ableitung nach x existiert, und berechne in diesen Punkten die partielle Ableitung nach x. *(4 Punkte)*

Hinweis 1: Betrachte den Differenzenquotienten.

Hinweis 2: $x^{1/3}$ ist für $x < 0$ nicht definiert.

(c) Zeige, dass in $(0, 0)$ beide partielle Ableitungen existieren und Null sind. *(2 Punkte)*

(d) Ist f in $(0, 0)$ differenzierbar? *(3 Punkte)*

Hinweis: Betrachte den Differenzenquotienten mit der Norm $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

---

2. Extremwertsuche.

(a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x, y) \mapsto x^2 - (1 - y^2)^3$ gegeben. Zeige, dass die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = (1 - y^2)^3\}$$

in $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ enthalten ist. *(2 Punkte)*

Hinweis: Zeige zuerst, dass $1 - y^2 \geq 0$ für alle $(x, y) \in M$ gilt.

(b) Begründe, warum die Menge M kompakt ist. *(1 Punkte)*

(c) Zeige, dass M zwei Singularitäten hat, und bestimme ihre Koordinaten. *(3 Punkte)*

(d) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

hat als stetige Funktion auf der kompakten Menge M mindestens ein Maximum und mindestens ein Minimum. Bestimme die Koordinaten und die Funktionswerte von allen Maxima und Minima. *(7 Punkte)*

---

3. Satz der inversen Funktion.

Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x^2 - y^2).$$

(a) Zeige, dass die folgende Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$$

gleich der Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist, wo F' invertierbar ist. *(3 Punkte)*

(b) Sei $Q = [0, \infty) \times [0, \infty)$. Zeige, dass die Einschränkung $F|_Q$ von F auf Q injektiv ist. *(3 Punkte)*

(c) Wegen (b) ist $F|_Q : Q \to F[Q]$ bijektiv. $(0, 0) \in Q$ liegt aber nicht in M. Warum widerspricht das nicht dem Satz der inversen Funktion? *(1 Punkt)*

---

4. Integration.

Sei

$$\begin{aligned}\Phi :&(0,\infty)\times(0,\infty)\to\{(u,v)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\mid -u<v<u\},\\ &(x,y)\mapsto\Phi(x,y)=(u,v) \text{ mit } u=x^2+y^2, v=x^2-y^2\end{aligned}$$

(a) Zeige, dass Φ bijektiv ist und bestimme die Umkehrabbildung. *(4 Punkte)*

(b) Sei $M=\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)\,|\,x^2+y^2<1\}$. Bestimme $\Phi[M]$. *(2 Punkte)*

(c) Zeige mit der Jacobische Transformationsformel folgende Gleichung. Gib genau an auf welche Funktion und welche Abbildung die Jacobische Transformationsformel angewandt wird.

$$\int_M 8xy\;d\mu=\int_{\mathbb{R}^2}\chi_{\Phi[M]}\;d\mu$$

(4 Punkte)

---

5. Lebesgue.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int \chi_{(-\infty,x]} f \, d\mu$.

(a) Zeige, dass dann, wenn f beschränkt ist, F lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstant $\|f\|_\infty$. *(3 Punkte)*

(b) Beweise, dass für alle $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ folgendes gilt

$$\left| \int \chi_{(-\infty,x]} h \, d\mu - \int \chi_{(-\infty,x]} g \, d\mu \right| \leq \|h - g\|_1$$

(3 Punkte)

(c) Im Skript wurde gezeigt, dass es für das gegebene $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen existiert, die in $L^1(\mathbb{R})$ gegen f konvergiert. Definiere $F_n(x) = \int \chi_{(-\infty,x]} f_n \, d\mu$. Zeige, dass wegen (b) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen F konvergiert. *(1 Punkt)*

(d) Begründe, warum aus (a) und (c) folgt, dass F stetig ist. *(2 Punkte)*
