Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

24. März 2021

Abgabefrist von diesem Übungsblatt ist Mittwoch, der 14. April um 12:00 Uhr (nach der Osternpause).

4. Übung

11. Stetigkeit und Linearität

(a) Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und Stetigkeit. Berechne gegebenenfalls die Operatornorm.

(i) Seien $0 < r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

$$f_1 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx \\ r\cos(t)y - r\sin(t)z \\ r\sin(t)y + r\cos(t)z \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

(ii)

$$f_2 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(3 Punkte)

(b) Seien V, W normierte Räume, Zeige, dass für die Operatornorm eines $A \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|_{op} &:= \sup\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \leq 1\} \\ &= \sup\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\} \\ &= \sup\{\tfrac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\} \\ &= \inf\{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Av\| \leq C\|v\| \mid v \in V\}. \end{aligned}$$

(3 Punkte)

Lösung.

(a) **(i)** Linearität: Wir müssen die Eigenshaften von Definition 9.55 zeigen. Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$

und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f_1(v+w) &= \begin{pmatrix} r(v_1+w_1) \\ r\cos(t)(v_2+w_2) - r\sin(t)(v_3+w_3) \\ r\sin(t)(v_2+w_2) + r\cos(t)(v_3+w_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} rv_1 + rw_1 \\ r\cos(t)v_2 + r\cos(t)w_2 - r\sin(t)v_3 - r\sin(t)w_3 \\ r\sin(t)v_2 + r\sin(t)w_2 + r\cos(t)v_3 + r\cos(t)w_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} rv_1 \\ r\cos(t)v_2 - r\sin(t)v_3 \\ r\sin(t)v_2 + r\cos(t)v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rw_1 \\ r\cos(t)w_2 - r\sin(t)w_3 \\ r\sin(t)w_2 + r\cos(t)w_3 \end{pmatrix} \\
&= f_1(v) + f_1(w).
\end{aligned}$$

$$f_1(\lambda v) = \begin{pmatrix} r\lambda v_1 \\ r\cos(t)\lambda v_2 - r\sin(t)\lambda v_3 \\ r\sin(t)\lambda v_2 + r\cos(t)\lambda v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} rv_1 \\ r\cos(t)v_2 - r\sin(t)v_3 \\ r\sin(t)v_2 + r\cos(t)v_3 \end{pmatrix} = \lambda f_1(v)$$

Stetig: Nach Satz 9.56 müssen wir nur stetig in 0 zeigen. Sei $(x_n, y_n, z_n) \to 0$. Für die drei Komponenten

$$rx_n \to 0, \;\; r\cos(t)y_n - r\sin(t)z_n \to r\cos(t)\cdot 0 - r\sin(t)\cdot 0 = 0, \;\; r\sin(t)y_n + r\cos(t)z_n \to 0,$$

und $f_1(0) = 0$. Deshalb ist f_1 stetig. (Oder Satz 9.57).
Operatornorm: Nach Aufgabenteil (b) ist die Operatornorm $\|f_1\|_{op} = \sup\{\|f_1(v)\|_2 \mid \|v\|_2 = 1\}$. Sei $\|v\|_2 = 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|f_1(v)\|_2^2 &= (rx)^2 + (r\cos(t)y - r\sin(t)z)^2 + (r\sin(t)y + r\cos(t)z)^2 \\
&= r^2(x^2+y^2+z^2) = r^2\|v\|_2^2 = r^2 \\
\|f_1(v)\|_2 &= r
\end{aligned}$$

Also $\{\|f_1(v)\|_2 \mid \|v\|_2 = 1\} = \{r\}$ und natürlich ist das Supremum r.

(ii) Linearität: Es ist nicht linear. Sei $v = (1,1)$. Dann ist $f_2(v) = \frac{\sqrt{1}\cdot 1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Aber $f_2(2v) = f_2(2,2) = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 2f_2(v)$.
Stetig: $\sqrt{x}$ ist stetig, wenn $x \geq 0$ ist. Also $\sqrt{|x|}$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass f_2 stetig ist, wenn $|x| + |y| \neq 0$. Wir untersuchen jetzt Stetigkeit in $(0,0)$. $f_2(0) = 0$. Bemerke, dass

$$|f_2(x,y)| = \frac{\sqrt{|x|}\,|y|}{|x|+|y|} \leq \frac{\sqrt{|x|}\,|y|}{0+|y|} = \sqrt{|x|}.$$

Also gilt für jede Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$

$$0 \leq \left|\lim_{n\to\infty} f_2(x_n, y_n)\right| = \lim_{n\to\infty} |f_2(x_n,y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{|x_n|} = 0.$$

Deshalb ist $\lim_{n\to\infty} f_2(x_n, y_n) = 0$. Wir haben gezeigt, dass f_2 stetig in 0 ist.

Operatornorm ist definiert auf der Menge aller *linearen* stetigen Abbildungen. f_2 liegt nicht in dieser Menge. Man kann noch die vier Zahlen aus Teil (b) berechnen, aber sie muss nicht gleich. z.B

$$\sup\big\{|f_2(v)| \mid \|v\|_2 = 1\big\} = 0.448, \qquad \sup\big\{\tfrac{|f_2(v)|}{\|v\|_2} \mid v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big\} = \infty$$

(b) Seien

$$\begin{aligned} N_1 &= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \le 1\big\} \\ N_2 &= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\} \\ N_3 &= \sup\big\{\tfrac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\big\} \\ N_4 &= \inf\big\{C \in \mathbb{R} \;:\; \|Av\| \le C\|v\| \mid v \in V\big\}. \end{aligned}$$

Zu zeigen: $N_1 = N_2$
Weil $\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \le 1\big\} \supseteq \big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\}$, folgt $N_1 \ge N_2$. Wenn $\|v\|_V \le 1$, seien $\lambda := \|v\|_V$ und $w = \lambda^{-1}v$. $\|w\|_V = \lambda^{-1}\|v\|_V = 1$. Dann $\|Aw\|_W = \|A(\lambda^{-1}w)\|_W = \|\lambda^{-1}\,Av\|_W = \lambda^{-1}\|Av\|_W > \|Av\|_W$. Das heißt, für alle v mit $\|v\|_V \le 1$ gibt es ein w mit $\|w\|_V = 1$, so dass die Norm von Aw ist größer gleich als Av. Also $N_1 \le N_2$.
Zu zeigen: $N_2 = N_3$
Für $\|v\| = 1$ ist $\|Av\| = \frac{\|Av\|}{\|v\|}$. Das zeigt $\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\} \subseteq \big\{\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\big\}$ und $N_2 \le N_3$. Wähle $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig und setze $w = \|v\|^{-1}v$ so dass $\|w\| = 1$. Bemerke

$$\|Aw\| = \Big\|A\|v\|^{-1}v\Big\| = \|v\|^{-1}\|Av\| = \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}.$$

Deshalb $\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\} \supseteq \big\{\frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\big\}$ und $N_2 \ge N_3$
Zu zeigen: $N_3 = N_4$
$\|Av\| \le C\|v\| \Leftrightarrow \frac{\|Av\|}{\|v\|} \le C$, also ist jedes C ein obene Schrank von $\{\frac{\|Av\|}{\|v\|}\}$. sup ist die kleinste obene Schrank.

12. HDI mal anders.

Sei $a < b$. Wir betrachten den Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ als normierten Raum mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{\,|f(x)|\,|\, x \in [a,b]\,\}$. (Da stetige Funktionen auf Kompakat beschränkt sind, ist die Norm wohldefiniert.) Weiter sei $C^1([a,b],\mathbb{R})$ der in Aufgabe 1(c) definierte Unterraum von $C([a,b],\mathbb{R})$. Also hat in diesem Situation $C^1([a,b],\mathbb{R})$ auch die Norm $\|\cdot\|_\infty$. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung der Ableitung von f auf $[a,b]$.
Wir untersuchen den "Differentialoperator" von $C^1([a,b],\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung

$$D : C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f'\ .$$

(a) *Zeige*, dass die Abbildung D linear ist und *bestimme* ihren Kern, d.h. die Menge (sogar linearen Unterraum) $\ker(D) = \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\}$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D an *keiner* Stelle $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ stetig ist. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ eine Funktion $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ existiert mit $\|f-g\|_\infty < \delta$ und $\|D(f) - D(g)\|_\infty \geq \varepsilon$. Dabei kann hier $\varepsilon := 1$ gewählt werden. D.h. die Norm von $f-g$ ist klein, aber die Norm von $D(f-g)$ ist nicht so klein. Untersuche $c\sin(x/c)$ auf $[-c\pi, c\pi]$ für $c > 0$.]

Nun betrachten wir den "Integraloperator" $I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C^1([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto I(f)$, der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in [a,b]$$

gegeben ist.

(c) *Zeige*, dass die Abbildung I linear ist und *bestimme* ihren Kern. *(2 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass I Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

(e) Was ist die Operatornorm von I? *(1 Punkte)*

(f) *Zeige*, dass I ein "Rechts-Inverses" von D ist, d.h. dass

$$D \circ I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f$$

gilt und *bestimme* das Bild von D. (*Kurzschreibweise:* $D \circ I = \mathbb{1}_{C([a,b],\mathbb{R})}$.) *(3 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Seien $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$D(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda \cdot f' + \mu \cdot g' = \lambda \cdot D(f) + \mu \cdot D(g).$$

Also ist D linear. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ gilt

$$D(f) = 0 \Longleftrightarrow f'(x) = 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \overset{\text{Satz 7.15 (i)}}{\Longleftrightarrow} f \text{ ist konstant.}$$

Daher ist $\ker(D) = \{\text{konstante Funktionen } [a,b] \to \mathbb{R}\}$ (dies ist ein 1-dim.UVR von $C^1([a,b],\mathbb{R})$.

(b) Erste untersuchen wir $h(x) = c\sin(x/c)$ auf $[-c\pi, c\pi]$ nach dem Tipp. Es ist klar, dass $\|h\|_\infty = c\|\sin(x/c)\|_\infty = c$, weil $|\sin(x/c)| \leq 1$ und $\sin(\frac{c\pi}{2c}) = 1$. Wenn c klein ist, dann ist h auch klein in der Norm. Aber ist $D(h) = \cos(x/c)$ nicht so klein, egal was c ist: $\|D(h)\|_\infty = 1$. Die Periode von h ist $2\pi c$, also wenn $2\pi c < b - a$ gilt, enthält $[a,b]$ eine volle Periode.

Sei $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ vorgegeben, $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$ ebenfalls vorgegeben. Sei $c := \min\{\frac{b-a}{2\pi}, \frac{\delta}{2}\}$ (so dass $c \leq \frac{\delta}{2}$ gilt und $[a,b]$ eine volle Periode enthält) und definiere $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ durch $g(x) := f(x) + c\sin(c^{-1}x)$. Damit gilt

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \left\|c\sin\left(c^{-1}x\right)\right\|_\infty = c \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Aber

$$\begin{aligned} d(D(f), D(g)) &= \|D(f-g)\|_\infty = \left\|D\left(c \sin\left(c^{-1}x\right)\right)\right\|_\infty = \left\|\cos\left(c^{-1}x\right)\right\|_\infty \\ &= 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Was haben wir gezeigt? Effektiv haben wir gezeigt, dass D nicht stetig in $0 \in C_b([a,b])$ ist: für $c \to 0$ konvergiert h_c gegen 0 bezüglich der Maximumnorm, aber $D(h_c)$ konvergiert nicht gegen $D(0) = 0$. Das ist das Folgekriterium von Stetigkeit. Weil D linear ist, folgt es, dass es stetig in keinem Punkt ist.

(c) Seien $f, g \in C([a,b], \mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_a^x ((\lambda f + \mu g)(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda I(f)(x) + \mu I(g)(x) = (\lambda I(f) + \mu I(g))(x) \end{aligned}$$

und somit $I(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot I(f) + \mu \cdot I(g)$, I also linear.

Ist $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ gegeben mit $I(f) = 0$ (d.h. $I(f)(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$), so gilt auch $0 = I(f)' = f$ (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)). Also ist $\ker(I) = \{0\}$.

(d) Für $g \in C([a,b], \mathbb{R})$ und $x \in [a,b]$ gilt

$$|I(g)(x)| = \left|\int_a^x g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |g(t)|\ \mathrm{d}t \leq \int_a^x \|g\|_\infty\ \mathrm{d}t \leq \|g\|_\infty \int_a^x\ \mathrm{d}t \leq (b-a) \cdot \|g\|_\infty$$

und daher

$$\|I(g)\|_\infty \leq (b-a)\|g\|_\infty.$$

Mit der Linearität von I ergibt sich hieraus für $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$, dass

$$d(I(f), I(g)) = \|I(f) - I(g)\|_\infty = \|I(f-g)\|_\infty \leq (b-a) \cdot \|f-g\|_\infty = (b-a) \cdot d(f,g),$$

also ist I Lipschitz-stetig mit Lipschitz- Konstante $L = b - a$.

(e) Wir wissen nach (d), dass $\|I\|_{op} \leq (b-a)$. Sei $f(x) = 1$ die konstante Funktion, so dass $\|f\|_\infty = 1$. Dann

$$\|I(f)\|_\infty = \left\|\int_a^x 1\ \mathrm{d}t\right\|_\infty = \|x - a\|_\infty = b - a.$$

Das zeigt, dass $\|I\|_{op} \geq (b-a)$. Zusammen haben wir $\|I\|_{op} = (b-a)$.

(f) Für $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ gilt $D(I(f)) = D\big(x \mapsto \int_a^x f(x)dx\big) = \big(x \mapsto \int_a^x f(x)dx\big)' = f$, wobei das letzte Gleichheitszeichen aus dem HDI folgt. Also gilt

$$D \circ I = \mathbb{1}_{C([a,b],\mathbb{R})}.$$

<u>Beh:</u> $\mathrm{im}(D) = C([a,b], \mathbb{R})$.

<u>"$\subset$"</u> ✓

"$\supset$" Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $F := I(f) = \big(x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\big)$. Nach dem HDI ist $F \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und wir haben eben gesehen, dass $D(F) = F' = f$. Also ist $f \in \operatorname{im}(D)$.

13. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung.*

(a) Seien $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

(i) $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

(1+1+2 Bonuspunkte)

[*Tipp:* Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) *Berechne* $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Bonuspunkte)

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. *Zeige:* $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt. *(2 Bonuspunkte)*

(d) *Folgere* aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(1 Bonuspunkte)

(e) *Zeige*, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und *folgere* hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist. *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) **(i)** Es gilt $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & s_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 t_2 & 0 \\ 0 & s_1 s_2 \end{pmatrix}$ und daher gilt für $A := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, dass

$$A^n = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & s^n \end{pmatrix}$$ *(induktiv zeigbar).*

Daraus ergibt sich, dass

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^s \end{pmatrix}.$$

(ii) Mit $A := \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} = -t^2 \cdot \mathbb{1}$ und daher *(induktiv zeigbar)*

$$A^{2n} = (-1)^n t^{2n} \cdot \mathbb{1} \qquad \text{und} \qquad A^{2n+1} = (-1)^n t^{2n} \cdot A = (-1)^n t^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} A^{2n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos(t)} \cdot \mathbb{1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1) t^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin(t)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+s & 1 \end{pmatrix}$ und daher gilt für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nt & 1 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich *(induktiv zeigbar)*

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & 0 \\ t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ te & e \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag rechts unten ergibt sich hierbei aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot nt = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot t.$$

(b) Nach (a)(i) ist $e^A = \begin{pmatrix} e^5 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$ und nach (a)(ii) ist $e^B = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und somit

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 0 & -e^5 \\ e^3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^B \cdot e^A = \begin{pmatrix} 0 & -e^3 \\ e^5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n$

$$\overbrace{=}^{AB=BA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{=\frac{n!}{(n-k)!k!}} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!}A^k\right) \cdot \left(\frac{1}{(n-k)!}B^{n-k}\right)$$

$$\overset{(\star)}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}B^\ell\right)$$

$$= \exp(A) \cdot \exp(B)$$

wobei $(\star)$ aus dem Cauchy-Produkt (Df. 4.16) folgt.

(d) Es gilt $A \cdot (-A) = (-A) \cdot A$ und deshalb nach (b):

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(0) = \mathbb{1},$$
$$\exp(-A) \cdot \exp(A) = \exp((-A) + A) = \exp(0) = \mathbb{1}\,.$$

Hieraus folgt, dass $\exp(A)$ invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

(e) Es gilt

$$(P^{-1}AP)^k = \overbrace{(P^{-1}A\underbrace{P)(P^{-1}}_{=\mathbb{1}}AP)\dots(P^{-1}AP)}^{\text{k mal}} = P^{-1}A^kP.$$

und daher

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(P^{-1}AP)^k = P^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^kP = P^{-1}e^AP.$$

Ist A diagonalisierbar, so existiert eine invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und eine Diagonalmatrix $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, so dass $P^{-1}AP = D$. Aus (a)(i) folgt damit $P^{-1}e^AP = \left(\begin{smallmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^s \end{smallmatrix}\right)$. Also ist mit A auch e^A diagonalisierbar.

Zusatzaufgabe für Ostern

A. Die Metrik aus einer Norm ist besondere

Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $d(v, w) = \|v - w\|$ die induzierte Metrik.

(a) Zeige, dass d Translationsinvarianz hat. d.h. $\forall u, v, w \in V$ gilt $d(u + w, v + w) = d(u, v)$.
(1 Bonuspunkt)

(b) Zeige, dass d Homogenität hat. d.h. $\forall v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v, w)$.
(1 Bonuspunkt)

(c) Beweise: für jede Metrik d auf V mit dieser zwei Eigenshaften ist $\|v\| := d(v, 0)$ eine Norm. (Hier ist das 'Gegenteil' von Satz 9.5) *(3 Bonuspunkte)*

(d) Wie kann mann sehen, dass die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^2$ nicht aus einer Norm kommt?
(1 Bonuspunkt)

(e) Wie kann mann sehen, dass die 'Kamm-metrik' in GÜ2 nicht aus einer Norm kommt? Die Kamm-metrik ist definiert auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$d_{Kamm}(x, y) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{falls } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

(1 Bonuspunkt)

Lösung.

(a) $d(u + w, v + w) = \|u + w - v - w\| = \|u - v\| = d(u, v)$.

(b) $d(\lambda v, \lambda w) = \|\lambda v - \lambda w\| = \|\lambda(v - w)\| = |\lambda| \, \|v - w\| = |\lambda| d(v, w)$.

(c) Wir müssen die drei Eigenshaften von Normen zeigen.
(i) Positivität: $\|v\| = d(v, 0) \geq 0$, weil eine Metrik Positivität hat. $\|v\| = 0$ genauso wenn $d(v, 0) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
(ii) Homogenität: $\|\lambda v\| = d(\lambda v, 0) = |\lambda| d(v, 0) = |\lambda| \, \|v\|$.
(iii) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\|v + w\| &= d(v + w, 0) = d(v, -w) && \text{(Translationsinvarianz)} \\
&\leq d(v, 0) + d(0, -w) && \text{(Dreiecksungleichung für Metrik)} \\
&= d(v, 0) + d(-w, 0) && \text{(Symmetrie)} \\
&= d(v, 0) + |-1| \, d(w, 0) && \text{(Homogenität)} \\
&= \|v\| + \|w\|.
\end{aligned}$$

(d) Die diskrete Metrik d_{dis} hat Translationsinvarianz, aber ist nicht homogen: für $v = (0, 0), w = (1, 0), \lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
d_{dis}(\lambda v, \lambda w) &= d_{dis}((0, 0),\ (2, 0)) = 1, \\
|\lambda| \, d_{dis}(v, w) &= 2 \cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

(e) Die Kamm-metrik ist homogen, aber es hat nicht Translationsinvarianz: für $v = (0,0), w = (1,0), u = (0,1)$:

$$d_{Kamm}(v,w) = 1,$$
$$d_{Kamm}(v+u, w+u) = d_{Kamm}((0,1),\ (1,1)) = 1+1+1 = 3.$$

B. Der Funktionenraum $\boldsymbol{B([0,1],\mathbb{R})}$. Mit $B([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der beschränkten Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Für $f \in B([0,1],\mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f(\tfrac{x}{3}) \quad \text{für } x \in [0,1]. \qquad (\diamond)$$

(a) *Zeige* $F(f) \in B([0,1],\mathbb{R})$. Wegen (a) wird durch $(\diamond)$ eine Abbildung

$$F : B([0,1],\mathbb{R}) \to B([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto F(f)$$

definiert. Zeige, dass F linear ist. *(2 Bonuspunkte)*

(b) *Zeige:* F ist Lipschitz-stetig; als Lipschitz-Konstante kann $L = 1$ gewählt werden. *(1 Bonuspunkt)*

(c) Berechne $\|F\|_{op}$. *(1 Bonuspunkt)*

Lösung.

(a) Für $f \in B([0,1],\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
\|F(f)\|_\infty &= \sup\left\{\left|f\left(\frac{x}{3}\right)\right| \;\middle|\; x \in [0,1]\right\} \\
&= \sup\left\{|f(x)| \;\middle|\; x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\} \\
&\leq \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \\
&= \|f\|_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt, da $f \in B([0,1],\mathbb{R})$. Also ist $F(f) \in B([0,1],\mathbb{R})$.
Außerdem ist F linear, denn für alle $f, g \in B([0,1],\mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$F(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)\left(\frac{x}{3}\right) = \alpha f\left(\frac{x}{3}\right) + \beta g\left(\frac{x}{3}\right) = \alpha F(f)(x) + \beta F(g)(x)$$

und somit $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$. Insgesamt ergibt sich also, dass $F \in \mathcal{L}(B([0,1],\mathbb{R}))$.

(b) Aus der Berechnung in (a) ergibt sich für $f \in B([0,1],\mathbb{R})$, dass

$$\|F(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

und daher für $f, g \in B([-1,1],\mathbb{R})$

$$d(F(f), F(g)) = \|F(f) - F(g)\|_\infty \overset{(\star)}{=} \|F(f-g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty = \overbrace{1}^{=L} \cdot d(f,g).$$

Bei $(\star)$ geht ein, dass F linear ist

(c) Wir wissen schon, dass $\|F(f)\|\infty \leq 1 \cdot \|f\|_\infty$. Also $\|F\|_{op} \leq 1$. Wähle $f(x) = 1$. Dann ist $\|f\|_\infty = 1$ und, wegen $F(f) = f$, auch $\|F(f)\|_\infty = 1$. $\|F(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ zeigt, dass $\|F\|_{op} \geq 1$. Daher $\|F\|_{op} = 1$.

C. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) *Berechne* $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *(1 Bonuspunkt)*

(b) *Zeige*, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2)\ . \qquad \textit{(1 Bonuspunkt)}$$

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B). \qquad \textit{(1 Bonuspunkt)}$$

(d) *Zeige*, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.
Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses.
(2 Bonuspunkte)

(e) *Zeige* mit Hilfe von Aufgabe 13(c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a)
$$D_A(L) = AL - LA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 13 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 10 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Für $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$\begin{aligned} D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2) &= (AL_1 - L_1 A)L_2 + L_1(AL_2 - L_2 A) \\ &= AL_1 L_2 - L_1 A L_2 + L_1 A L_2 - L_1 L_2 A \\ &= AL_1 L_2 - L_1 L_2 A = D_A(L_1 L_2). \end{aligned}$$

(c) Sei $L \in \mathcal{L}(V)$. Wir wissen, dass $\mathcal{L}(V)$ eine normierte Vektorraumalgebra ist (vgl. Def. 9.62). Daher gilt wegen des Assoziativgesetzes der Multiplikation für beliebiges $L \in \mathcal{L}(V)$, dass

$$(\ell(A)r(B))(L) = \ell(A)(L \cdot B) = A \cdot (L \cdot B) = A \cdot L \cdot B = (A \cdot L) \cdot B = r(B)(A \cdot L) = r(B)\ell(A)(L)$$

und somit $\ell(A)r(B) = r(B)\ell(A)$.

(d) Es ist für $L \in \mathcal{L}(V)$

$$\ell(A \cdot B)(L) = (A \cdot B) \cdot L = A \cdot (B \cdot L) = \ell(A)\ell(B)(L). \tag{$\star$}$$

Wir zeigen zunächst induktiv, dass daraus $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ folgt:

$\underline{n = 1}$**:** $\ell(A^1) = \ell(A) = (\ell(A))^1$. ✓

$\underline{n \rightsquigarrow n+1}$**:** Wir nehmen an, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist

$$\ell(A^{n+1}) = \ell(A^n \cdot A) \overset{(\star)}{=} \ell(A^n) \cdot \ell(A) \overset{\text{I.V.}}{=} \ell(A)^n \cdot \ell(A) = \ell(A)^{n+1}. \quad \checkmark$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \exp(\ell(A))(L) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \big(\ell(A)\big)^k\right)(L) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ell(A^k)\right)(L) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \ell(A^k)(L)\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k L\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)(L) = \ell\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right)(L) = \ell(\exp(A))(L). \end{aligned}$$

Ganz genau müsste man wie im folgende Abschnitt vorgehen, um die obige Aussage ganz sauber zu beweisen. Jedoch ist auch obige "Abkürzung" volle Punktzahl wert.

Damit gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \big(\ell(A)\big)^k\right)(L) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ell(A^k)\right)(L) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ell(A^k)L\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k L\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right)(L) = \ell\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right)(L). \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

Außerdem ist die Linksmultiplikation $\ell(A)$ stetig, denn mit der Norm aus Df. 9.58 und beliebigem $L \in \mathcal{L}(V)$ ist

$$\|\ell(A)L\| = \|A \cdot L\| \leq \underbrace{\|A\|}_{\substack{<C, \text{ da} \\ A \in \mathcal{L}(V)}} \cdot \|L\|$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\exp(\ell(A)) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\ell(A))^k\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\ell(A))^k\right) \overset{(\dagger)}{=} \lim_{n\to\infty}\ell\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right)\\ &= \ell\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^k\right) = \ell\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right) = \ell(\exp(A)).\end{aligned}$$

Die Aussage $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$ zeigt man analog.

(e) Mit den bisherigen Ergebnissen erhalten wir

$$\begin{aligned}\exp(D_A)(L) &= \exp(\ell(A) - r(A))(L) = \exp(\ell(A)) \cdot \exp(-r(A))(L)\\ &\overset{(d)}{=} \ell(\exp(A)) \cdot r(\exp(-A))(L) = \ell(\exp(A))(L \cdot \exp(-A)) = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).\end{aligned}$$

Das zweite "=" gilt, da wir in (c) gezeigt haben, dass $\ell(A)$ und $r(A)$ kommutieren. Denn daher dürfen wir Aufgabe 13(c) anwenden.

D. Eine andere Vervollständigung von $\mathbb{Q}$

In einem vollständigen Metrikraum hat jede Cauchyfolge ein Grenzwert. In einem unvollstädigen Metrikraum X, haben manche Cauchyfolge kein Grenzwert und wir sagen dann, dass es 'vermisste' Punkte gibt. Wenn wir einen vollständigen Metrikraum Y finden, so dass $X \subset Y$ und $\overline{X} = Y$, nennen wir Y der Vervollständigung von X. Y enthält diese vermisste Punkte. Jede Cauchyfolge in X hat eine Grenzwert in Y und jede Punkt in Y ist das Grenzwert von einer Cauchyfolge in X.

Wie kann man aber Y finden? Hier ist eine Idee. Wir beginnen mit einem größen Metrikraum Z, dem vollständig ist, und finden eine Abbildung $\Phi : X \to Z$. Wenn Φ eine Isometrie ist, dann sind effektiv X und $\Phi[X]$ der gleiche Raum. Setze $Y := \overline{\Phi[X]}$. Weil Y abgeschlossen im vollständigen Metrikraum Z, folgt es dass Y auch vollständig ist. Also ist Y die Vervollständigung von X.

Satz 9.47 benutzt diese Strategie. Da ist $Z = C_b(X, \mathbb{R})$ und $\Phi = I$ für $I(x)(y) = d(x,y) - d(x_0, y)$. Unten geben wir einanderes Beispiel: eine Aufgabe zum Fall $X = \mathbb{Q}$ mit $Z = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\Phi : \mathbb{Q} \to C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Welche Satz sagt, dass $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (mit Supremum-Norm) vollständig ist? *(1 Bonuspunkt)*

(b) Jetzt definieren wir $\Phi : \mathbb{Q} \to C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Das heißt, für jede $r \in \mathbb{Q}$, $\Phi(r)$ eine stetige beschränkte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sein muss. Setze $\Phi(r)(x) = r$. Die ist klar eine konstante Funktion, also stetig und beschränkt.

Zeige, dass Φ injektiv ist. *(1 Bonuspunkt)*

[Sie müssen zeigen, wenn $\Phi(r)$ und $\Phi(s)$ die gleiche Funktion ist, dass $r = s$]

(c) Zeige, dass Φ eine Isometrie ist: $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $d(r,s) = d'(\Phi(r), \Phi(s))$ für $d(r,s) = |r - s|$ auf $\mathbb{Q}$ und $d'(f,g) = \|f - g\|_\infty$ auf $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *(2 Bonuspunkte)*

(d) Nach der Strategie haben wir eine Vervollständigung $Y := \overline{\Phi[\mathbb{Q}]} \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von $\mathbb{Q}$ gefunden. Beschreibe die Funktionen in Y. Warum ist Y äquivalent zu $\mathbb{R}$? *(1 Bonuspunkt)*

(e) Mache Aufgabenteilen (a)-(c) für Satz 9.47: $X = \mathbb{Q}$, $Z = C_b(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ und $\Phi(r)(y) = d(r,y) - d(0,y)$. *(2 Bonuspunkte)*

(f) Warum kann wir mit diesem Beweis die reelle Zahlen nicht *ex nihilo* konstruieren? Deshalb müssen wir Dedekindsche Schnitte (Schnitt 2.7) oder Aufgabe 7 benutzen. *(0 Bonuspunkte, nur Aufklärung)*

Lösung.

(a) $\mathbb{R}$ ist vollständig. Also sagt Satz 9.46(iii), dass $C_b(X,\mathbb{R})$ vollständig ist, für jede Metrikraum X.

(b) Konstante Funktionen sind gleich genauso wenn ihre Konstante gleich sind. $\Phi(r) = x \mapsto r$ hat das Konstant r und $\Phi(s) = x \mapsto s$ hat das Konstant s. Also $\Phi(r) = \Phi(s) \Rightarrow r = s$.

(c)

$$\|\Phi(r) - \Phi(s)\|_\infty = \sup\{|\Phi(r)(x) - \Phi(s)(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|r-s|\} = |r-s|.$$

(d) Die Funktionen in Y sind genau die konstante Funktionen $f(x) = y$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Natürlich gibt es das Äquivalenz zwischen $f(x) = y$ und y.

(e) (a) ist gleich.

(b): Nach der Dreiecksungleichungen $d(r,x) \leq d(r,0) + d(0,x)$ und $d(0,x) \leq d(0,r) + d(r,x)$ folgt es, dass

$$|\Phi(r)(x)| = |d(r,x) - d(0,x)| \leq d(r,0)$$

für alle $x \in \mathbb{Q}$. Also ist Φ beschränkt. Auf jedem Metrikraum X und für alle Punkte $x \in X$ ist die Funktion $y \mapsto d(x,y)$ stetig. Es folgt, dass $\Phi(r)$ ist stetig. Deshalb ist $\Phi(r) \in C_b(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ wohldefiniert.

Dass Φ injektiv ist, folgt nach es eine Isometrie ist.

(c):

$$\begin{aligned}
d'(\Phi(r),\Phi(s)) &= \|\Phi(r) - \Phi(s)\|_\infty = \sup\{|\Phi(r)(x) - \Phi(s)(x)| \mid x \in \mathbb{Q}\} \\
&= \sup\{|d(r,x) - d(0,x) - d(s,x) + d(0,x)| \mid x \in \mathbb{Q}\} \\
&= \sup\{|d(r,x) - d(s,x)| \mid x \in \mathbb{Q}\} \\
&= \sup\left\{\Big||r-x| - |s-x|\Big| \mid x \in \mathbb{Q}\right\}.
\end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nehme $r < s$ an. Dann

$$|r-x| - |s-x| = \begin{cases} r-s & \text{fall } x \leq r, \\ 2x - r - s & \text{fall } r < x < s, \\ s - r & \text{fall } s \leq x. \end{cases}$$

Das Supremum vom Betrag ist $|r-s|$. Also $d'(\Phi(r),\Phi(s)) = |r-s| = d(r,s)$ zeigt, dass Φ eine Isometrie ist.

Geheim-bonus-aufgabe: Warum können wir in Satz 9.47 $I(r)(x) = d(x, r)$ oder $I(r)(x) = d(r, 0)$ nicht benutzen? Welche Eigenshaften sind dann Falsch?

(f) In Teil (a) benutzen wir schon, dass $\mathbb{R}$ existiert und vollständig ist. Deshalb kann diese Beweis nicht $\mathbb{R}$ konstruieren; das würde Zirkelschluss.