Kapitel 11

Nichtlineare Analysis

11.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

In diesem Kapitel bieten wir eine kurze Einführung in die nichtlineare Analysis. Der bei weitem wichtigste Satz der nichtlinearen Analysis ist der sogenannte Banachsche Fixpunktsatz. Wir werden gleich mehrere Anwendungen kennenlernen.

Banachscher Fixpunktsatz 11.1. *Sei $f : X \to X$ eine lipschitzstetige Abbildung eines vollständigen metrischen Raumes X auf sich selber mit Lipschitzkonstante $L < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt: $x \in X$ mit $f(x) = x$. Für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die induktiv durch $x_{n+1} = f(x_n)$ definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Fixpunkt.*

Beweis: Sei $x_0 \in X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ induktiv definiert durch $x_{n+1} = f(x_n)$. Dann gilt

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann für $n < m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (L^n + \ldots + L^{m-1})d(x_0, x_1) \\ &= L^n \frac{1 - L^{m-n}}{1 - L} d(x_0, x_1) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und es existiert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. Also ist x ein Fixpunkt. Ist $y \in X$ ein zweiter Fixpunkt, so gilt $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$. Es folgt $(1-L)d(x, y) \leq 0$ und wegen $L < 1$ auch $0 \leq d(x, y) \leq 0$. Also gilt $x = y$. **q.e.d.**

Eine Anwendung ist z.B. der Satz von Picard Lindelöf über die Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung, von der Form

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit } u : I \to X \quad \text{und } f : I \times U \to X.$$

Hierbei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, X ein normierter Vektorraum und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Der Punkt über u bezeichnet die Ableitung nach t. Diese Variable steht in vielen Anwendungen für die Zeit. Das Anfangswertproblem besteht aus der Suche nach einer differenzierbaren Funktion $u : I \to U$, die die Differentialgleichung erfüllt und an einem Punkt $t_0 \in I$ den Anfansgwert $u(t_0) = u_0 \in U$ annimmt.

Definition 11.2. *Eine Funktion f von einem metrischen Raum X in den metrischen Raum Y heißt lokal lipschitzstetig, wenn es für jedes $x_0 \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x_0 gibt und eine Lipschitzkonstante $L > 0$, so dass für alle $x, x' \in U$ gilt*

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x').$$

Satz 11.3. *(Lokale Existenz und Eindeutigkeit) Sei I ein offenes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die bezüglich der zweiten Variablen lokal lipschitzstetig ist, d.h. für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \times B(u_0, \delta)$ gilt*

$$\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\|_1 \leq L\|u - \tilde{u}\|_1.$$

Dann gibt es für jedes $(t_0, u_0) \in I \times U$ ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ mit $u(t_0) = u_0$ auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ genau eine Lösung besitzt.

Beweis: Wir benutzen auf $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\|_1$. Wegen der lokalen Lipschitzstetigkeit gibt es $\delta > 0$ und $L > 0$, so dass für alle $(t, u), (t, \tilde{u}) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(u_0, \delta)} \subset I \times U$ auch $\|f(t, u) - f(t, \tilde{u})\|_1 \leq L\|u - \tilde{u}\|_1$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : u \mapsto F(u) \text{ mit } F(u)(t) = u_0 + \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, u(s))ds, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(s, u(s))ds \right)$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(u_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Sei

$$\|f(\cdot, u_0)\|_\infty = \sup\{\|f(s, u_0)\|_1 \mid s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]\}.$$

Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$, dann gilt für alle $u \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ und alle $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ wegen Satz 8.3

$$\|F(u)(t) - u_0\|_1 = \left\| \int_{t_0}^{t} (f(s, u_0) + f(s, u(s)) - f(s, u_0))ds \right\|_1 \leq \epsilon\,(\|f(\cdot, u_0)\|_\infty + L\delta) \leq \delta$$

Also bildet F den vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $u, \tilde{u} \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(u_0, \delta)})$ und $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ gilt

$$\|F(u)(t) - F(\tilde{u})(t)\|_1 \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\|_1 \, ds \right| \leq \epsilon L\|u - \tilde{u}\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als $\epsilon < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,u_0)\|_\infty + L\delta}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(\cdot,u_0)\|_\infty + L\delta}\right\}$.

Dann definiert die Abbildung F eine lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L < 1$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon], \overline{B(u_0,\delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{u}(t) = f(t,u)$ für alle $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ mit $u(t_0) = u_0$. Also löst u dieses Anfangswertproblem auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$. Wenn u umgekehrt auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ dieses Anfangswertproblem löst, dann ist die Ableitung von $F(u)-u$ gleich Null, und beide Funktionen $F(u)$ und u sind bei $t = t_0$ gleich u_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Satz 11.4*: *(Globale Existenz und Eindeutigkeit) Sei $O \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : O \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die wie bei der lokalen Existenz und Eindeutigkeit lokal lipschitzstetig ist. Dann gibt es für jedes $(t_0,u_0) \in O$ genau ein maximales Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$, das t_0 enthält, und auf dem das Anfangswertproblem*

$$\dot{u}(t) = f(t,u) \quad \textit{mit} \quad u(t_0) = u_0$$

genau eine Lösung u enthält. Das Intervall ist in dem Sinne maximal, dass an beiden Rändern, also bei a und b, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $a = -\infty$ *(bzw. $b = \infty$).*

(ii) $t \mapsto \|f(t,u(t))\|_1$ *ist für alle $\epsilon > 0$ auf $(a,a+\epsilon)$ (bzw. $(b-\epsilon,b)$) unbeschränkt.*

(iii) *Die Lösung u läßt sich stetig auf $[a,b)$ (bzw. $(a,b]$) fortsetzen, der Graph der Fortsetzung liegt aber nicht in O, d.h. $\lim_{t\downarrow a}(t,u(t)) \notin O$ (bzw. $\lim_{t\uparrow b}(t,u(t)) \notin O$).*

Beweis*: Seien zuerst $q_1 : (a_1,b_1) \to \mathbb{R}^n$ und $q_2 : (a_2,b_2) \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $\dot{q}(t) = f(t,q(t))$ mit $q_1(t_1) = q_2(t_1)$ für ein $t_1 \in (a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$. Wenn das Infimum von

$$A = \{a \in (a_1,t_1]\cap(a_2,t_1] \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [a,t_1]\}$$

in $(a_1,t_1]\cap(a_2,t_1]$ liegt, dann liegt es wegen der Stetigkeit von q_1-q_2 in A. Dann würde A wegen dem Satz von Picard-Lindelöf eine Umgebung vom $\inf A$ enthalten, was der Definition des Infimums widerspricht. Also gilt $A = (a_1,t_1]\cap(a_2,t_1]$. Weil genauso auch

$$\{b \in [t_1,b_1)\cap[t_1,b_2) \mid q_1(t) = q_2(t) \text{ für alle } t \in [t_1,b]\} = [t_1,b_1)\cap[t_1,b_2)$$

gilt stimmen dann q_1 und q_2 auf $(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)$ überein. Insbesondere definieren auf der Vereinigung ihrer offenen Definitionsbereiche alle Lösungen $q : I \ni t_0 \to \mathbb{R}^n$ von

$$\dot{q}(t) = f(t,q) \quad \text{mit} \quad q(t_0) = q_0$$

auch eine Lösung q. Wir zeigen jetzt, dass diese Vereinigung der Definitionsbereiche an den Rändern die Bedingung (iii) erfüllt, wenn (i) und (ii) nicht gelten. Dann ist $\dot{q}$ auf einer Menge $(a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b)$ beschränkt und q ist dort lipschitzstetig. Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergiert, konvergiert $((t_n, q(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ gegen den gleichen Grenzwert. Läge dieser in O, dann besäße das Anfansgwertproblem

$$\dot{q}(t) = f(t, q(t)) \qquad \text{mit} \qquad q(a) = \lim_{t\to a+} q(t) \qquad \text{bzw.} \qquad q(b) = \lim_{t\to b-} q(t)$$

wegen dam Satz von Picard-Lindelöf eine Lösung auf einer Umgebung von a bzw. b, die in obiger Vereinigung der Definitionsbereiche enthalten wäre. Das zeigt (iii).**q.e.d.**

Bemerkung 11.5*. *Wenn (ii) erfüllt ist, kann $t \mapsto f(t, u(t))$ nicht stetig auf $[a, a+\epsilon)$ bzw. $(b-\epsilon, b]$ fortgesetzt werden. Also können u und f nicht so stetig auf größere Definitionsbereiche fortgesetzt werden, dass a (bzw. b) im Definitionsbereich von u und $(a, u(a))$ (bzw. $(b, u(b))$) im Definitionsbereich von f liegt.*

11.2 Das Lösen von nichtlinearen Gleichungen

Die Lösungen der Gleichungen von der Form

$$Ax = y, \quad A \in \mathcal{L}(V, W), \quad x \in V \text{ und } \quad y \in W$$

in einem (endlichdimensionalen) Vektorraum V sind in der linearen Algebra untersucht worden. Wenn A invertierbar ist, dann ist $x = A^{-1}y$ die eindeutige Lösung. In diesem Abschnitt nutzen wir das Verständnis dieser Gleichungen für Gleichungen von der Form

$$f(x) = y, \quad f : V \to W, \quad x \in V \text{ und } \quad y \in W$$

mit nichtlinearen Abbildungen f. Dabei nehmen wir an, dass f differenzierbar ist, und durch lineare Abbildungen angenähert werden kann. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass kleine Störungen von invertierbaren linearen Abbildungen invertierbar sind.

Lemma 11.6. *Seien V und W Banachräume und A ein invertierbares Element von $\mathcal{L}(V, W)$. D.h. es gibt ein Element $A^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$ mit $AA^{-1} = \mathbb{1}_W$ und $A^{-1}A = \mathbb{1}_V$. Dann sind alle Elemente des folgenden Balles um A invertierbar:*

$$B \in B\left(A, \tfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \subset \mathcal{L}(V, W) \quad \textit{mit} \quad \|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A - B\|}$$

Beweis: Offenbar ist $B = A - (A - B) = A(\mathbb{1}_V - A^{-1}(A - B))$. Wegen Satz 9.61 gilt $\|A^{-1}(A - B)\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\| < 1$ für $B \in B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right)$. Dann folgt aus der Neumannschen Reihe, dass $\mathbb{1}_V - A^{-1}(A - B)$ invertierbar ist in $\mathcal{L}(V)$ und der inverse

Operator beschränkt ist durch $\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|}$. Also ist auch B invertierbar und es gilt

$$B^{-1} = \left(\mathbb{1}_V - A^{-1}(A-B)\right)^{-1} A^{-1} \quad \text{mit} \quad \|B^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|A-B\|},$$

$$B^{-1} - A^{-1} = ((\mathbb{1}_V - A^{-1}(A-B))^{-1} - \mathbb{1}_V)A^{-1} = A^{-1}(A-B)(\mathbb{1}_V - A^{-1}(A-B))^{-1}A^{-1}$$

mit $\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|A-B\|}$. **q.e.d.**

Damit bilden die invertierbaren Elemente von $\mathcal{L}(V,W)$ eine offene Teilmenge.

Korollar 11.7. *Für Banachräume V und W und inverierbare $A \in \mathcal{L}(V,W)$ ist*

$$B\left(A, \tfrac{1}{\|A^{-1}\|}\right) \to \mathcal{L}(W,V), \quad B \mapsto B^{-1}$$

eine analytische Abbildung, also insbesondere unendlich oft stetig differenzierbar.

Beweis: Aus Lemma 11.6 und der Neumannschen Reihe folgt für alle $B \in B(0, \frac{1}{\|A^{-1}\}})$

$$\|(A+B)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}BA^{-1}\| \le \left\| A^{-1}\sum_{n=2}^{\infty}(-BA^{-1})^n \right\| \le \frac{\|B\|^2\|A^{-1}\|^3}{1-\|B\|\|A^{-1}\|}.$$

Insbesondere ist $A \mapsto A^{-1}$ differenzierbar mit der Ableitung $B \mapsto -A^{-1}BA^{-1}$ bei A, und damit einmal mehr differenzierbar als $A \mapsto A^{-1}$, also unendlich oft. Für $B \in B(0, \frac{1}{\|A^{-1}\|}) \subset \mathcal{L}(V,W)$ und $t \in [0,1]$ gilt $(A+tB)^{-1} = A^{-1}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} t^n(-BA^{-1})^n$.**q.e.d.**

Lemma 11.8. *Sei $f : U \to V$ eine bijektive Abbildung zwischen offenen Teilmengen der normierten Vektorräume $U \subset X$ und $V \subset Y$. Wenn f bei $x_0 \in U$ differenzierbar, $f'(x_0)$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ invertierbar, und f^{-1} bei $y_0 = f(x_0)$ stetig ist, dann ist f^{-1} bei y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.*

Beweis: Sei $x_0 \in U$ wie im Lemma, $0 < \epsilon \le 1$ und $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\| \le \tfrac{\epsilon}{2}\|(f'(x_0))^{-1}\|^{-1} \cdot \|x-x_0\| \quad \text{für alle } x \in B(x_0,\delta) \subset U$$

gilt. Es folgt $\|f'(x_0)(x-x_0)\| \le \|f(x)-f(x_0)\| + \frac{1}{2}\|(f'(x_0))^{-1}\|^{-1}\cdot\|x-x_0\|$ und damit

$$\|(f'(x_0))^{-1}\|\cdot\|f(x)-f(x_0)\| \ge \|(f'(x_0))^{-1}\|\cdot\|f'(x_0)(x_0-x)\| - \tfrac{1}{2}\|x-x_0\| \ge \tfrac{1}{2}\cdot\|x-x_0\|.$$

Bei y_0 ist f^{-1} stetig, und $f[B(x_0,\delta)]$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Für $x \in B(x_0,\delta)$ gilt

$$\begin{aligned}\|x - x_0 - (f'(x_0))^{-1}(f(x)-f(x_0))\| &\le \|(f'(x_0))^{-1}\|\cdot\|f'(x_0)(x-x_0) - f(x) + f(x_0)\| \\ &\le \tfrac{\epsilon}{2}\|x-x_0\| \le \epsilon\|(f'(x_0))^{-1}\|\cdot\|f(x)-f(x_0)\|.\end{aligned}$$

Also ist f^{-1} bei $f(x_0)$ differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. **q.e.d.**

Satz 11.9. *(Satz über die inverse Funktion) Seien X, Y Banachräume, $f: U \to Y$ eine differenzierbare Abbildung von einer offenen Teilmenge $U \subset X$ nach Y. Wenn f' bei $x_0 \in U$ stetig und $f'(x_0)$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $V \subset U$ und $W \subset Y$ von x_0 bzw. $f(x_0)$, so dass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrabbildung $f^{-1}: W \to V$ mit Ableitung $y \to (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$.*

Dabei ist f^{-1} auf W genauso oft (stetig) differenzierbar wie f auf V.

Beweis: Zuerst ersetzen wir f durch $h \circ f \circ g$ mit folgenden Abbildungen

$$g: X \to X, \qquad x \mapsto x + x_0, \qquad h: Y \to X, \qquad y \mapsto (f'(x_0))^{-1}(y - f(x_0)).$$

Die Abbildungen g und h sind bijektiv und glatt und haben glatte Umkehrabbildungen. Dadurch wird $Y = X$, $x_0 = 0 = f(x_0)$, und $f'(x_0) = \mathbb{1}_X$. Weil f' stetig bei 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|f'(x) - \mathbb{1}_X\| \le \frac{1}{2}$ für $x \in \overline{B(0,\delta)} \subset U$ gilt. Wegen dem Schrankensatz ist für jedes $y \in X$ die Abbildung

$$F_y : \overline{B(0,\delta)} \to \overline{B(y, \tfrac{\delta}{2})}, \quad x \mapsto y + x - f(x)$$

lipschitzstetige mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2}$. Dann gilt auch für alle $x \in \overline{B(0,\delta)}$

$$\|F_y(x) - y\| = \|F_y(x) - F_y(0)\| \le \tfrac{1}{2}\|x - 0\| \le \tfrac{\delta}{2}.$$

Wenn y in $\overline{B(0, \frac{\delta}{2})}$ liegt, dann liegt $\overline{B(y, \frac{\delta}{2})}$ in $\overline{B(0,\delta)}$. Also definiert F_y dann eine Abbildung von $\overline{B(0,\delta)}$ auf sich selbst. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, dass für jedes $y \in \overline{B(0, \frac{\delta}{2})}$ die Abbildung F_y auf $\overline{B(0,\delta)}$ genau einen Fixpunkt hat und der Fixpunkt in $\overline{B(y, \frac{\delta}{2})}$ liegt. Weil x genau dann ein Fixpunkt von F_y ist, wenn $f(x) = y$ ist, gibt es für alle $y \in B(0, \frac{\delta}{2})$ auf $B(0,\delta)$ genau eine Lösung von $f(x) = y$. Sei also $W = B(0, \frac{\delta}{2})$ und $V = f^{-1}[W] \cap B(0,\delta)$. Dann ist W und V als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung offen und $f: V \to W$ bijektiv. Weil F_0 auf $\overline{B(0,\delta)}$ lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $\frac{1}{2}$, gilt für alle $x, x' \in \overline{B(0,\delta)}$ auch

$$\|x - x'\| = \|F_0(x) - F_0(x') + f(x) - f(x')\| \le \tfrac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$
$$\text{oder auch} \quad \|x - x'\| \le 2\|f(x) - f(x')\|.$$

Also ist f^{-1} lipschitzstetig und wegen Lemma 11.6 und dem vorangehenden Lemma differenzierbar. Die letzte Aussage folgt aus dem Korollar 11.7 und Satz 10.4 (iii).**q.e.d.**

Beispiel 11.10. *Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann nicht abgeschwächt werden zu einfacher Differenzierbarkeit. Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \textit{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \textit{für } x = 0 \end{cases}$$

ist differenzierbar mit $f'(0) = \frac{1}{2}$. Aber f ist in keiner Umgebung der 0 injektiv.

Korollar 11.11. *(Satz über die implizite Funktion) Seien X und Y Banachräume, U eine offene Teilmenge von $X \times Y$ und $f : U \to Y$ differenzierbar. Wenn f' in $(x_0, y_0) \in U$ stetig und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ in $\mathcal{L}(Y)$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen V von x_0 in X, W von $f(x_0, y_0)$ in Y und O von (x_0, y_0) in U und eine differenzierbare Funktion $g : V \times W \to Y$, so dass $f^{-1}[\{z\}] \cap O = \mathrm{Graph}(g(\cdot, z))$ für alle $z \in W$ gilt:*

$$\{(x, y) \in O \mid f(x, y) = z\} = \{(x, g(x, z)) \mid x \in V\} \quad \textit{für alle } z \in W.$$

Beweis: Für $F : U \to X \times Y$, $(x, y) \mapsto (x, f(x, y)))$ gilt $F(x + v, y + w) - F(x, y) = (v, f(x + v, y + w) - f(x, y)$. Deshalb ist F bei allen $(x, y) \in U$ differenzierbar mit

$$F'(x, y) : X \times Y \to X \times Y, \qquad (v, w) \mapsto = \left(v, \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} v + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} w\right).$$

Wenn $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ in $\mathcal{L}(Y)$ invertierbar ist, dann ist der inverse Operator gegeben durch

$$(F'(x, y))^{-1} : X \times Y \to X \times Y, \quad (v, w) \mapsto \left(v, \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^{-1} \left(w - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} v\right)\right)$$

Also erfüllt F in (x_0, y_0) die Voraussetzungen des Satzes über die inverse Funktion. Deshalb gibt es Umgebungen V von x_0 in X, W von $f(x_0, y_0)$ in W und O von (x_0, y_0) in U, so dass die Abbildung $O \to V \times W$, $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ bijektiv ist und eine Umkehrabbildung besitzt. Diese Umkehrabbildung muss aber wegen der Gestalt von F von der Form $V \times W \to O$, $(x, y) \mapsto (x, g(x, y))$ sein, mit einer differenzierbaren Funktion $g : V \times W \to Y$. Insbesondere sind für alle $z \in W$ alle Lösungen $(x, y) \in O$ von $f(x, y) = z$ im Graphen von $V \to Y$, $x \mapsto g(x, z)$ enthalten. **q.e.d.**

Definition 11.12 (Untermannigfaltigkeit)**.** *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Untermannigfaltigkeit, wenn bei jedem $x \in A$ eine stetig differenzierbare Funktion $f : O \to \mathbb{R}^m$ auf einer in $\mathbb{R}^n$ offen Menge existiert, so dass $f'(x)$ surjektiv und $f^{-1}[\{0\}] = A \cap O$ ist.*

Nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten erfüllt f bei $x \in A$ als Funktion auf $O \subset \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ die Vorraussetzungen des Satzes der impliziten Funktion. Also gilt lokal $A = \mathrm{Graph}(g)$ für eine Funktion $g : V \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$.

Beispiel 11.13. (i) Höhenlinien: *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die z.B. in Abhängigkeit von Längen- und Breitengraden die Höhe über dem Meeresspiegel beschreibt. Wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ in einem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ nicht verschwindet, dann gibt es eine stetig differenzierbare Funktion*

$$g : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \times (f(x_0, y_0) - \delta, f(x_0, y_0) + \delta) \to \mathbb{R},$$

so dass für $z \in (f(x_0, y_0) - \delta, f(x_0, y_0) + \delta)$ die Höhenlinien zur Höhe z der Graph

$$\{x, g(x, z)) \mid x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)\} \quad \textit{von} \quad (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x, z)$$

ist. Für festes z zeigt also der Vektor $(1, \frac{\partial g}{\partial x}(x,z))$ in Richtung der Höhenlinie durch $(x, g(x,z))$ und steht senkrecht auf dem Gradienten von f bei $(x, g(x,z))$.

(ii) Hyperflächen: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Ableitung in eimem Punkt x_0 nicht verschwindet. Dann verschwindet auch mindestens eine partielle Ableitung nicht. Nach einer geeigneten Permutation der Koordinaten, können wir $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ annehmen. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ der Vektor der ersten $n-1$ Koordinaten von x_0. Dann lassen sich für $z \in (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)$ lokal die Niveaumengen $f^{-1}[\{z\}]$ durch den Graphen einer Funktion $g : B(y_0, \epsilon) \times (f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \to \mathbb{R}$ beschreiben als $\{(y, g(y,z)) \mid y \in B(y_0, \epsilon)\}$, also durch $y \in B(y_0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ parametrisiert. Für alle (y,z) in dieser Umgebung von $(y_0, f(x_0))$ ist das Bild der partiellen Ableitungen*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \times \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$$

der Kern von $f'(y, g(y,z)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, der Tangentialraum an die Niveauflächen heißt.

Definition 11.14. *Eine unendlich oft (stetig) differenzierbare bijektive Abbildung mit unendlich oft (stetig) differenzierbarer Umkehrabbildung heißt Diffeomorphismus.*

Beispiel 11.15. *Polarkoordinaten Die Abbildung*

$$(0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, \sin\varphi)$$

heißt Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2$. Offenbar ist diese Abbildung unendlich oft stetig differenzierbar. Die Umkehrabbildung ist dann gegeben durch

$$(x,y) \mapsto (r, \varphi) \quad \textit{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textit{und}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \textit{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \textit{für } y < 0 \end{cases} \overset{\mod 2\pi}{=} \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) & \textit{für } x \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$

Also ist diese Abbildung ein Diffeomorphismus von $(0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hier beschreibt $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ den Raum aller Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$, wobei

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Dieser Raum ist offenbar lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}$, weil in jedem Intervall dessen Länge kleiner ist als 2π, verschiedene Elemente verschiedene Äquivalenzklassen repräsentieren. Deshalb sind die Einschränkungen der Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ auf beliebige offene Intervalle mit Längen nicht gößer als 2π, die jedes Element auf die entsprechende Äquivalenzklasse abbilden, Diffeomorphismen.

11.3 Lagrangemultiplikatoren

Ziel dieses Abschnittes ist es die lokalen Extremwerte von Funktionen auf solchen Teilmengen eines normierten Vektorraumes X zu bestimmen, die die Nullstellen von endlich vielen reellen diffenzierbaren Funktionen bilden. Wir sprechen dann von Zwangsbedingungen, wegen denen nur die Punkte in diesen Nullstellenmengen in Betracht kommen. Diese Situation ist recht allgemein und kommt in vielen Anwendungen der Wirtschaftswissenschaften vor. Dieses Verfahren ist die Grundlage für die nichtlineare Optimierung, in der man nach Extremwerten auf Teilmengen eines Banachraumes sucht. Darauf aufbauend wird in der konvexen Analysis nach Bedingungen gesucht, die die Existenz und Eindeutigkeit von solchen Extremwertproblemen garantieren.

Definition 11.16. *Sei $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung auf einer offenen Teilmenge eines normierten Vektorraumes X. Für $x_0 \in U$ heißt $A = g^{-1}[\{g(x_0)\}] = \{x \in U \mid g(x) = g(x_0)\}$ Niveaumenge. Sie ist abgeschlossen in U, wenn g stetig ist.*

Definition 11.17. *Die Niveaumenge A heißt in einem Punkt $x_0 \in A$ stetig differenzierbar (glatt), wenn es eine offene Umgebung U von $x_0 \in X$ und eine stetig differenzierbare (glatte) bijektive Funktion Φ von einer offenen Teilmenge O eines normierten Vektorraumes Y auf $A \cap U$ gibt, so dass $\Phi'(\Phi^{-1}(x_0))$ ein linearer Isomorphismus von Y auf den Kern von $g'(x_0)$ d.h. $\{x \in X \mid g'(x_0)(x) = 0\}$ ist. Ein solcher Punkt x_0 heißt kritischer Punkt der Einschränkung $f|_{(A\cap U)}$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf die Niveaumenge, wenn $\Phi^{-1}(x_0)$ ein kritischer Punkt von $f \circ \Phi$ ist.*

In Lemma 12.34 werden wir zeigen, dass im $\mathbb{R}^d$ eine Niveaumenge in allen Punkten eine Untermannigfaltigkeit (Definition 11.12) ist, in denen sie stetig differenzierbar ist.

Aufgrund der Definition ist ein Punkt $x_0 \in U$, an dem die Niveaumenge A stetig differenzierbar ist, höchstens dann ein lokaler Extremwert der Einschränkung $f|_A$ einer differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, wenn er ein kritischer Punkt im Sinne dieser Definition ist. Deshalb kommen als die lokalen Extremwerte von $f|_A$ neben diesen kritischen Punkten nur solche Punkte in Betracht, an denen die Niveaumenge nicht stetig differenzierbar ist. Sie werden Singularitäten genannt. Im folgenden werden also einerseits diese kritischen Punkte und andereseits die Singularitäten charakterisiert.

Satz 11.18. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und $g : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge U eines normierten Vektorraumes X und die Niveaumenge $A = g^{-1}[\{g(x_0)\}]$ bei $x_0 \in U$ stetig differenzierbar. Dann ist x_0 genau dann ein kritischer Punkt von der Einschränkung $f|_A$ von f auf A, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gibt, so dass $f'(x_0) = \lambda_1 g_1'(x_0) + \ldots + \lambda_m g_m'(x_0)$ gilt.*

Definition 11.19. *Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen Lagrangemultiplikatoren.*

Beweis: Ein stetig differenzierbarer Punkt $x_0 \in U$ von $A = g^{-1}[\{g(x_0)\}]$ ist genau dann ein kritischer Punkt von f_A, wenn $\Phi^{-1}(x_0)$ ein kritischer Punkt von $f \circ \Phi$ ist.

Hierbei ist $\Phi : O \to U \cap A$ wie in der Definiton 11.17 bijektiv und stetig differenzierbar, und $\Phi'(\Phi^{-1}(x_0))$ ein linearer Isomorphismus auf den Kern von $g'(x_0)$. Das ist äquivalent dazu, dass $f'(x_0)\Phi'(\Phi^{-1}(x_0))$ verschwindet, oder dazu, dass $f'(x_0)$ auf dem Bild von $\Phi'(\Phi^{-1}(x_0))$, also auf dem Kern $Y = \{x \in X \mid g'(x_0)(x) = 0\}$ von $g'(x_0)$ verschwindet.

Für alle $r = 1, \ldots, R = \dim g'(x_0)[X]$ gibt es dann einen kleinsten Index $l_r > l_{r-1}$, so dass $(g'_1(x_0), \ldots, g'_{l_r}(x_0))$ den Rang r hat genauso wie $(g'_{l_1}(x_0), \ldots, g'_{l_r}(x_0))$. Die Komponenten von $g'(x_0)$ sind also Linearkombinationen von denen von $\tilde{g}'(x_0) = (g'_{l_1}(x_0), \ldots, g'_{l_R}(x_0))$, und Y ist auch der Kern von $\tilde{g}'(x_0)$. Diese lineare Abbildung bildet geeignet gewählte $z_1, \ldots, z_R \in X$ auf die Standardbasis $e_1, \ldots, e_R$ von $\mathbb{R}^R$ ab. Dann liegt $x - \sum_{r=1}^{R} g'_{l_r}(x_0)(x) z_r$ für alle $x \in X$ in Y. Aus $f'(x_0)|_Y = 0$ folgt also

$$f'(x_0)(x) = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g'_{l_r}(x_0)(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X \quad \text{mit} \quad \lambda_r = f'(x_0)(z_r).$$

Umgekehrt verschwindet $\lambda_1 g'_1(x_0) + \ldots + \lambda_m g'_m(x_0)$ für $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ auf Y.**q.e.d.**

Lemma 11.20. *Sei $g : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Menge U eines normierten Vektorraumes X. Dann ist für alle $r \in \mathbb{N}_0$ die Menge $\{x \in U \mid \dim(g'(x)[X]) \geq r\}$ entweder leer oder offen.*

Beweis: Sei $x_0 \in \{x \in U \mid \dim(g'(x)[X]) \geq r\}$. Dann gibt es Indizes $1 \leq l_1 < \ldots < l_r \leq m$, so dass $(g'_{l_1}(x_0), \ldots, g'_{l_r}(x_0))$ eine surjektive Abbildung nach $\mathbb{R}^r$ ist. Sie bildet geeignet gewählte Elemente $z_1, \ldots, z_r \in X$ auf die Standardbasis $e_1, \ldots, e_r$ von $\mathbb{R}^r$ ab. Weil g stetig differenzierbar ist, sind die Funktionen $x \mapsto g'_{l_i}(x)(z_j)$ auf U stetig. Deshalb enthält $\{x \in U \mid \dim(g'(x)[X]) \geq r\}$ die offenen Umgebung von x_0 in U, auf der die Determinante der $r \times r$ Matrix $(g'_{l_i}(x)(z_j))_{1 \leq i,j \leq r}$ nicht verschwindet. **q.e.d.**

Typischerweise werden die Zwangsbedingungen glatte Funktionen sein. Aber selbst dann sind die Niveaumengen nicht immer glatt.

Satz 11.21. *(Rangsatz) Für eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^m$ auf einer offenen Menge U eines Banachraumes X ist die Niveaumenge $A = g^{-1}[\{g(x_0)\}]$ in allen lokalen Maxima x_0 von der Funktion $x \mapsto \dim(g'(x)[X])$ stetig differenzierbar.*

Beweis: Wenn $g'(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^m)$ surjektiv ist, dann gibt es Elemente $z_1, \ldots, z_m \in X$, die durch $g'(x_0)$ auf die Standardbasis $e_1, \ldots, e_m$ von $\mathbb{R}^m$ abgebildet werden. Sei Z der von $z_1, \ldots, z_m$ aufgespannte Unterraum von X, und Y der Kern von $g'(x_0)$. Für alle $x \in X$ gilt $g'(x_0)(x - g'_1(x_0)(x)z_1 - \ldots - g'_m(x_0)(x)z_m) = 0$. Deshalb ist die Abbildung

$$I : X \to Y \times Z, x \mapsto \big(x - g'_1(x_0)(x)z_1 - \ldots - g'_m(x_0)(x)z_m, g'_1(x_0)(x)z_1 + \ldots + g'_m(x_0)(x)z_m\big)$$

ein linearer stetiger Isomorphismus von X nach $Y \times Z$ mit $I^{-1}(y, z) = y + z$, der U auf eine offene Teilmenge von $O \subset Y \times Z$ abbildet. Dann ist $g \circ I^{-1} : O \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und die partielle Ableitung nach z ist bei $I(x_0)$ in $\mathcal{L}(Z, \mathbb{R}^m)$ invertierbar. In diesem Fall folgt dann die Aussage aus dem Satz über die implizite Funktion.

Wenn die Dimension $\dim(g'(x)[X])$ bei x_0 gleich r und auf einer Umgebung nicht größer als r ist, dann gibt es Indizes $1 \leq l_1 < l_2 \ldots < l_r \leq m$, so dass die linearen Abbildungen $g'_{l_1}(x_0), \ldots, g'_{l_r}(x_0)$ der Komponenten von $\tilde{g}(x) = (g_{l_1}(x), \ldots, g_{l_r}(x))$ bei $x = x_0$ linear unabhängig sind. Also ist schon gezeigt, dass die Niveaumenge $\tilde{A} = \tilde{g}^{-1}[\{\tilde{g}(x_0)\}]$ bei x_0 stetig differenzierbar ist. Wegen Lemma 11.20 sind $g'_{l_1}(x), \ldots, g'_{l_r}(x)$ auf einer Umgebung von x_0 linear unabhängig. Weil $\dim(g'(x)[X])$ auf einer Umgebung von x_0 nicht größer als r ist, stimmen auf einer Umgebung von x_0 wie im Beweis von Satz 11.18 die Kerne von $g'(x)$ und $\tilde{g}'(x)$ überein. Wegen Satz 11.18 besteht $\tilde{A}$ nur aus kritischen Punkten von g, und $\tilde{A}$ stimmt in dieser Umgebung mit A überein. **q.e.d.**

Weil die Funktion $\dim(g'(x)[X])$ nur die endlich vielen Werte $0, \ldots, m$ annehmen kann, gibt es in jeder offenen Menge U ein lokales Maximum. Die Menge aller solcher lokalen Maxima ist wegen Lemma 11.20 sogar offen und dicht in U. Mit Hilfe von dem Lemma 11.20 und dem Rangsatz können wir die Singularitäten der Niveaumengen von stetig differenzierbaren Funktionen $g : U \to \mathbb{R}^m$ dadurch bestimmen, dass wir

(i) wie im Beweis des Rangsatzes maximal viele Komponenten $\tilde{g}$ von g auswählen, deren Ableitungen $\tilde{g}'(x)$ an möglichst vielen Punkten surjektiv sind,

(ii) und dann die Punkte bestimmen, an denen diese Ableitung nicht surjektiv sind. Das sind die Nullstellen der Determinante aus dem Beweis von Lemma 11.20.

Beispiel 11.22. **(i)** $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = x^2 + y^2.$$
Der Gradient $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ von g verschwindet nur bei $(x, y) = 0$. Also sind alle Niveaumengen $g(x, y) = g_0$ mit $g_0 \neq g(0, 0) = 0$ glatte 1-dimensionale Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Es sind jeweils die Kreise mit Radius $\sqrt{g_0}$ um den Nullpunkt. Für $g_0 = 0$ besteht die Niveaumenge nur aus $\{0\}$. Der Nullpunkt ist eine Singularität der Niveaumenge.

(ii) $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = x^2 - y^2.$$
Der Gradient $\nabla g(x, y) = (2x, -2y)$ verschwindet wieder nur bei $(x, y) = (0, 0)$. Also sind alle Niveaumengen $g(x, y) = g_0$ mit $g_0 \neq g(0, 0) = 0$ glatte eindimensionale Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Es sind jewils zwei Hyperebenen. Die Niveaumenge $g(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$ besteht aber aus zwei Geraden $y = x$ und $y = -x$, die sich im Nullpunkt schneiden. Diese Niveaumenge hat also im Nullpunkt eine Singularität, weil sich dort zwei glatte Teilmengen schneiden. Man spricht von einem Doppelpunkt.

(iii) $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = y^2 - x^3.$$
Der Gradient $\nabla g(x, y) = (-3x^2, 2y)$ verschwindet wieder nur im Nullpunkt. Also sind wieder alle Niveaumengen $g(x, y) = g_0$ mit $g_0 \neq g(0, 0) = 0$ glatte eindimensionale Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Die Niveaumenge $g(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ besteht aus zwei Lösungen $y = \pm\sqrt{x^3}$ mit $x \geq 0$, die sich bei $(x, y) = 0$ einer gemeinsamen Halbgeraden parallel zu der x-Achse annähern. Man nennt deshalb die Singularität im Nullpunkt eine Spitze.

Satz 11.23.* *(Whitney) Jede nicht leere abgschlossene Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Nullstellenmenge einer glatten reellen Funktion auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweis*: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere abgeschlossene Menge. Dann besitzt $\mathbb{Q}^n \cap O$ mit $O = \mathbb{R}^n \setminus A$ eine Abzählung durch eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $B(x_m, r_m) = \bigcup_{\{r>0|B(x_m,r)\subset O\}} B(x_m, r)$ ein offner Ball in O. Die Vereinigung dieser Bälle $(B(x_m, r_m))_{m\in\mathbb{N}}$ ist dann eine offene Teilmenge von O. Jeder Punkt $x \in O$ ist in einem Ball $B(x, r) \subset O$ enthalten, und $B(x, \frac{r}{2})$ enthält ein x_m mit $r_m > \frac{r}{2}$. Dann liegt x in $B(x_m, r_m)$ und die Vereinigung der Bälle $(B(x_m, r_m))_{m\in\mathbb{N}}$ ist O. Die Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \qquad x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}) & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{für } \|x\| > 1 \end{cases}$$

ist unendlich oft stetig differenzierbar, und für alle $m \in \mathbb{N}_0$ sind alle partiellen Ableitungen höchstens m-ter Ordnung beschränkt durch ein $C_m > 0$. Alle partiellen Ableitungen höchstens m-ter Ordnung von $\psi_m(x) = \frac{1}{C_m}(\frac{\min\{1,r_m\}}{2})^m \psi(\frac{x-x_m}{r_m})$ sind beschränkt durch 2^{-m}. Für jedes Monom D in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ folgt aus Satz 8.38 induktiv im Grad von D, dass die Summe der partiellen Ableitungen $(\sum D\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen die entsprechende partielle Ableitung Df von $f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \psi_m$ konvergiert. Deshalb ist f glatt und die Nullstellenmenge von f ist gleich A. **q.e.d.**

Beispiel 11.24. (i) *Die sogenannte Cantormenge ist definiert als das Komplement $A = [0, 1] \setminus I$ folgender offenen Teilmenge von $[0, 1]$:*

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \bigcup_{(z_1,\ldots,z_n)\in\{0,1\}^n} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{2z_l}{3^l}, \frac{2}{3^{n+1}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{2z_l}{3^l} \right) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \cup (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}) \ldots$$

Sie ist offenbar eine abgeschlossene Teilmenge von $[0, 1]$ und wegen dem Satz von Whitney die Niveaumenge einer glatten reellen Funktion f auf $\mathbb{R}$. Weil in jeder Umgebung von jedem Punkt von A sowohl Elemente von A als auch Elemente von I enthalten sind, verschwinden alle Ableitungen von f auf A. Alle Punkte von A sind Singularitäten.
(ii) *Der Sierpinski Teppisch ist das Komplement $A = [0, 1]^2 \setminus I$ der offenen Teilmenge*

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \left[\bigcup_{(z_1,\ldots,z_n)\in\{0,1,2\}^n} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{z_l}{3^l}, \frac{2}{3^{n+1}} + \sum_{l=1}^{n} \frac{z_l}{3^l} \right) \right]^2 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})^2 \cup \left((\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{4}{9}, \tfrac{5}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\right)^2 \ldots$$

Die Menge I ist eine Teilmenge von dem kartesischen Produkt des Komplementes der Cantormenge in (i) mit sich selber. Wenn also x oder y zu der Cantormenge gehören, dann sind $\{x\} \times [0, 1]$ und $[0, 1] \times \{y\}$ Teilmengen von A. Deshalb ist A zusammenhängend. Wegen dem Satz von Whitney ist A die Nullstellenmenge einer glatten Funktion of $\mathbb{R}^2$. Wieder enthält jede Umgebung von jedem Punkt von A sowohl Elemente von A als auch Elemente von I, so dass alle Ableitungen von f auf A verschwinden. Alle Punkte von A sind Singularitäten.