

13. Übung

42. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei A das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden $x + 2y = 2$, $x - 2y = 2$, $x + 2y = -2$ und $x - 2y = -2$ berandet wird.

(i) Finde Koordinaten u, v so dass es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ gibt, so dass $A' = \Phi^{-1}[A]$ ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke (x, y) mit Hilfe der Koordinaten (u, v) aus. (2 Punkte)

(ii) Benutze diese Koordinaten, um $\int_A (3x + 6y)^2 d\mu$ zu berechnen. (2 Punkte)

(b) Es sei

$$B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y \leq 3 \} .$$

Berechne $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) d\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. (4 Punkte)

(c) Gegeben seien die Parabeln $P_1 : y = x^2$, $P_2 : y = 2x^2$, $P_3 : x = y^2$, $P_4 : x = 3y^2$ für $x, y > 0$. Wir betrachten die Fläche C zwischen den Stücken von P_1 und P_2 , die jeweils Schnittpunkte mit P_3 und P_4 haben und den Stücken von P_3 und P_4 , die jeweils Schnittpunkte mit P_1 und P_2 haben.

Skizziere die Fläche C im \mathbb{R}^2 und berechne deren Flächeninhalt $\mu(C) = \int \chi_C d\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel. (4 Punkte)

Tipp: Beachte, dass auf den Rändern von C gilt, dass entweder $\frac{y}{x^2}$ oder $\frac{x}{y^2}$ konstant ist und dass es ausreicht die inverse Transformation $\Phi^{-1}(x, y)$ zu kennen, um $\det(\Phi(u, v))$ zu bestimmen.

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $9x^2 + y^2 = 9$ und $9x^2 + y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = -x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der xy -Ebene.

(i) Bestimme das Gebiet D' der $r\varphi$ -Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. (1 Punkt)

(ii) Skizziere D in der xy -Ebene sowie D' in der $r\varphi$ -Ebene. (1 Bonuspunkt)

(iii) Berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört, sowie ihre Determinante. (1 Punkt)

(iv) Berechne mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2 + y^2} d\mu . \quad (2 \text{ Bonuspunkte})$$

Tipp: Der Wert $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.

43. Polarkoordinaten.

- (a) Es sei $R \in (0, \infty]$, $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in \mathbb{R}^2 und $f \in L^1(B_R)$ eine auf B_R beschränkte Funktion, deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. Zeige, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \, d\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \, d\varphi \, dr .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten*. (3 Punkte)

Tipp: Sei $O := B_R \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\})$ und $U := (0, R) \times (-\pi, \pi)$ sowie $\Phi : U \rightarrow O$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f \, d\mu = \int_O f \, d\mu$?

- (b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(-(x^2 + y^2)) .$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und berechne $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\mu$. (3 Punkte)

Tipp: Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst $f \cdot \chi_{B_R}$.

- (c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$$

gilt.

(2 Bonuspunkte)

44. Divergenzsatz

Es seien $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ und $F(x, y, z) = (x^2y, y^2x, z^3)$.

- (a) Berechne $\nabla \cdot F$ und $\int_Q \nabla \cdot F$. (2 Punkte)
- (b) $S_1 := [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{0\} \subset \partial Q$ ist eine Oberfläche des Würfels Q . Ist $N_1 := (0, 0, -1)$ auf S_1 eine äußere oder innere Normale? (1 Punkt)
- (c) Berechne $\int_{\partial Q} F \cdot N \, d\sigma$. (2 Punkte)
- (d) Sind die Integrale gleich? Gilt Satz 12.40? Was kann man sagen? (2 Bonuspunkte)