Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

9. Juni 2021

13. Übung

42. Integralberechnung mit der Jacobischen Transformationsformel.

(a) Es sei A das rautenförmige Gebiet, welches durch die Geraden $x + 2y = 2$, $x - 2y = 2$, $x + 2y = -2$ und $x - 2y = -2$ berandet wird.

(i) *Finde* Koordinaten u, v so dass es eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ gibt, so dass $A' = \Phi^{-1}[A]$ ein Quadrat der Seitenlänge 4 ist. Drücke (x, y) mit Hilfe der Koordinaten (u, v) aus. *(2 Punkte)*

(ii) Benutze diese Koordinaten, um $\int\limits_A (3x + 6y)^2 \, \mathrm{d}\mu$ zu *berechnen.* *(2 Punkte)*

(b) Es sei

$$B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y > 0 \text{ und } x + y \leq 3 \} .$$

Berechne $\int_B \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) \mathrm{d}\mu$ mit Hilfe der Transformationsformel. *(4 Punkte)*

(c) Gegeben seien die Parabeln $P_1 : y = x^2$, $P_2 : y = 2x^2$, $P_3 : x = y^2$, $P_4 : x = 3y^2$ für $x, y > 0$. Wir betrachten die Fläche C zwischen den Stücken von P_1 und P_2, die jeweils Schnittpunkte mit P_3 und P_4 haben und den Stücken von P_3 und P_4, die jeweils Schnittpunkte mit P_1 und P_2 haben.

Skizziere die Fläche C im $\mathbb{R}^2$ und *berechne* deren Flächeninhalt $\mu(C) = \int \chi_C \, d\mu$ mit Hilfe der Jacobischen Transformationsformel. *(4 Punkte)*

Tipp: Beachte, dass auf den Rändern von C gilt, dass entweder $\frac{y}{x^2}$ oder $\frac{x}{y^2}$ konstant ist und dass es ausreicht die inverse Transformation $\Phi^{-1}(x, y)$ zu kennen, um $\det(\Phi(u, v))$ zu bestimmen.

(d) Es sei D das durch die Ellipsen $9x^2 + y^2 = 9$ und $9x^2 + y^2 = 81$ sowie die Geraden $y = -x$ und $y = 0$ eingeschlossene Gebiet im zweiten Quadranten der xy-Ebene.

(i) *Bestimme* das Gebiet D' der $r\varphi$-Ebene, in das D unter der Koordinatentransformation $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = 3r \cdot \sin(\varphi)$ übergeht. *(1 Punkt)*

(ii) *Skizziere* D in der xy-Ebene sowie D' in der $r\varphi$-Ebene. *(1 Bonuspunkt)*

(iii) *Berechne* die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cdot \cos(\varphi), 3r \cdot \sin(\varphi)) ,$$

die zu der Transformation aus (i) gehört, sowie ihre Determinante. *(1 Punkt)*

(iv) *Berechne* mit Hilfe von (i)–(iii) das Integral

$$\int_D \frac{xy}{9x^2 + y^2} \, \mathrm{d}\mu . \qquad \textit{(2 Bonuspunkte)}$$

Tipp: Der Wert $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ könnte nützlich sein.

Lösung.

(a) (i) Wir wollen das Gebiet A in ein Quadrat transformieren. Indem man sich die Ränder des Gebiets A anschaut, erkennt man die Koordinatentransformation

$$\text{(I) } u = x + 2y \text{ und (II) } v = x - 2y.$$

Mit dieser Wahl ist $u = x + 2y \in [-2, 2]$ und $v = x - 2y \in [-2, 2]$ auf A'. Um dies einzusehen, drücken wir die Koordinaten der (x, y)-Ebene durch die Koordinaten (u, v) aus:
(I)+(II) ergibt $x = \frac{1}{2}(u + v)$ und (I)-(II) $y = \frac{1}{4}(u - v)$.
Betrachte

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{4}\right) = (x, y).$$

Die Abbildung Φ ist offenbar linear mit $\Phi(u, v) = M \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ und $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Es ist $\det(M) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \neq 0$, also ist Φ bijektiv. Weiter gilt $M^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ und daher $A = \Phi[A']$ mit

$$\begin{aligned} A' := \Phi^{-1}[A] &= \left\{ M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + sM^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + tM^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in [0, 1] \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in [0, 1] \right\} = [-2, 2] \times [-2, 2]. \end{aligned}$$

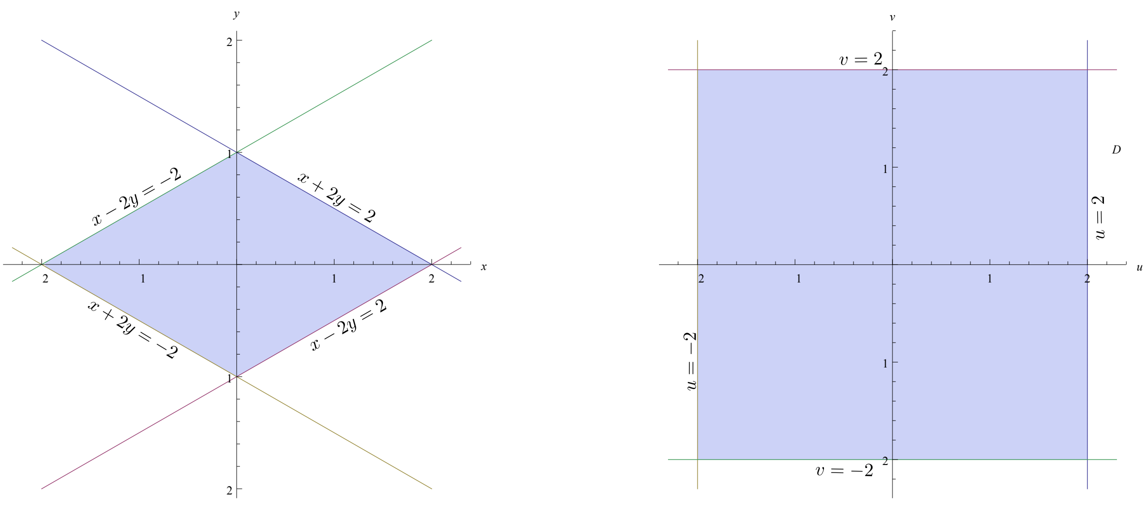

Figure 1: *
Links A, rechts $A' = \Phi^{-1}[A]$.

(ii) Die Funktion Φ bildet $(A')^\circ$ stetig differenzierbar und bijektiv auf A° ab und für $(u, v) \in (A')^\circ$ gilt

$$\det \Phi'(u, v) = \det M \neq 0.$$

Daher sind die Voraussetzungen der Transformationsformel erfüllt und es gilt mit

$f(x,y) = (3x+6y)^2$:

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A'} (f \circ \Phi) \cdot \underbrace{|\det \Phi'|}_{=\frac{1}{4}} \, d\mu = \frac{1}{4} \int_{A'} \underbrace{\left(\frac{3}{2}(u+v) + \frac{6}{4}(u-v) \right)^2}_{=(3u)^2} \, d\mu$$

$$= \frac{9}{4} \int_{A'} u^2 \, d\mu = \frac{9}{4} \int_{u=-2}^{2} \int_{v=-2}^{2} u^2 \, dv \, du = \frac{9}{4} \int_{u=-2}^{2} \left[u^2 v \right]_{v=-2}^{2} \, du$$

$$= \frac{9}{4} \int_{u=-2}^{2} 4u^2 \, du = 9 \int_{u=-2}^{2} u^2 \, du = \left[3u^3 \right]_{u=-2}^{2} = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 48.$$

(b) Benutze die Substitution $u = y + x$, $v = y - x$, d.h. $x = \frac{1}{2}(u-v)$, $y = \frac{1}{2}(u+v)$. Damit ist

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (u,v) \mapsto \left(\frac{1}{2}(u-v), \frac{1}{2}(u+v) \right) = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

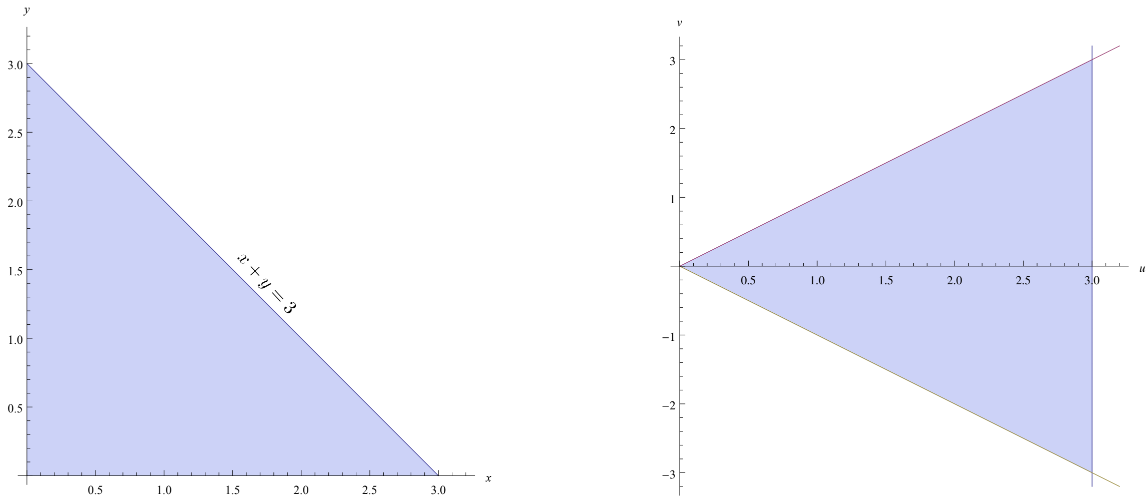

Figure 2: *
Links B, rechts $B' = \Phi^{-1}[B]$.

Dann ist

$$\det(M) = \frac{1}{4}(1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = \frac{1}{2} \neq 0$$

und somit ist die lineare Abbildung Φ bijektiv. Aus den B definierenden Ungleichungen ergibt sich für u und v

$$\left. \begin{array}{lll} x > 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(u-v) > 0 \Leftrightarrow v < u \\ y > 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}(u+v) > 0 \Leftrightarrow v > -u \end{array} \right\} \Leftrightarrow |v| < u \text{ (insbes. } u > 0) \Leftrightarrow -u < v < u$$

$x + y \leq 3 \Leftrightarrow u \leq 3.$

Also ist $\Phi[B'] = B$ mit

$$B' = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u \leq 3, \, -u < v < u \right\}.$$

Die Menge B' wird durch Φ bijektiv und stetig differenzierbar auf B abgebildet und es gilt $\det \Phi'(u,v) = \det M = \frac{1}{2} \neq 0$ für $(u,v) \in B'$. Somit sind die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel erfüllt und mit dieser gilt für $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$:

$$\int_B f \, \mathrm{d}\mu = \int_{B'} (f \circ \Phi) \cdot \underbrace{|\det \Phi'|}_{=\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2} \int_{B'} f\left(\frac{1}{2}(u-v), \frac{1}{2}(u+v)\right) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2} \int_{B'} \exp\left(\frac{v}{u}\right) \, \mathrm{d}\mu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u=0}^{3} \int_{v=-u}^{u} \exp\left(\frac{v}{u}\right) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_{u=0}^{3} \left[u \cdot \exp\left(\frac{v}{u}\right)\right]_{v=-u}^{u} \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} \int_{u}^{3} \left(u \cdot \exp\left(\frac{u}{u}\right) - u \cdot \exp\left(-\frac{u}{u}\right)\right) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \int_0^3 u \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{u=0}^{3} = \frac{9}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

(c) Setze $u = \frac{x^2}{y}$ und $v = \frac{y^2}{x} \Leftrightarrow x^2 = uy$ und $y^2 = vx$. Setzt man dies ineinander ein, so erhält man $x = \sqrt[3]{u^2 v}$ und $y = \sqrt[3]{uv^2}$. Betrachte also

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \ (x,y) \mapsto \left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

Die Funktion Φ^{-1} ist bijektiv (wegen der Äquivalenzen in obiger Rechnung) und stetig differenzierbar, also ist auch Φ bijektiv und stetig differenzierbar. Außerdem ist die Jacobi-Matrix von Φ^{-1}

$$(\Phi^{-1})'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$$

und somit gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\det(\Phi^{-1})'(x,y) = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} = 4 - 1 = 3 \neq 0.$$

Also ist auch $\det(\Phi'(u,v)) = \frac{1}{\det(\Phi^{-1})'(x,y)} = \frac{1}{3} \neq 0$ und $\Phi^{-1}[C] = C'$, wobei

$$C' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \ \frac{1}{3} \leq v \leq 1\right\}.$$

Nach der Transformationsformel ergibt sich daher

$$\mu(C) = \int \chi_C \, \mathrm{d}\mu = \int_C 1 \, \mathrm{d}\mu = \int_{C'} (1 \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\mu = \int_{C'} \frac{1}{3} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{3} \int_{u=\frac{1}{2}}^{1} \int_{v=\frac{1}{3}}^{1} 1 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{3} \int_{u=\frac{1}{2}}^{1} [v]_{v=\frac{1}{3}}^{1} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{3} \int_{u=\frac{1}{2}}^{1} \frac{2}{3} \, \mathrm{d}u = \frac{2}{9} \int_{u=\frac{1}{2}}^{1} 1 \, \mathrm{d}u = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

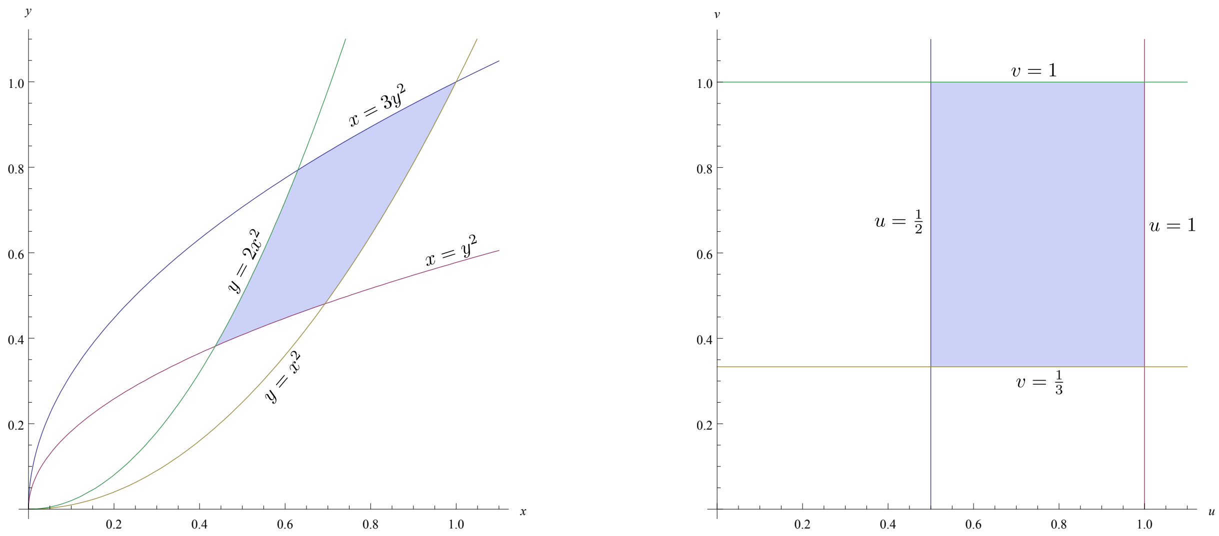

Figure 3: *
Links C, rechts $C' = \Phi^{-1}[C]$.

(d) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
0 \leq y \leq -x \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 3r\sin(\varphi) \leq r(\underbrace{-\cos(\varphi)}_{>0}) \;&\Leftrightarrow\; 0 \leq \underbrace{-\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}_{=-\tan(\varphi)} \leq \frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow\; 0 \geq \tan(\varphi) \geq -\frac{1}{3} \overset{\varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi]}{\Leftrightarrow} 0 \geq \tan(\varphi-\pi) \geq -\frac{1}{3} \\
&\Leftrightarrow \arctan(0) \geq \varphi - \pi \geq \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) \;\Leftrightarrow\; \pi \geq \varphi \geq \pi + \arctan\left(-\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
9 \leq 9x^2 + y^2 \leq 81 \;&\Leftrightarrow\; 9 \leq 9(r\cos(\varphi))^2 + (3r\sin(\varphi))^2 \leq 81 \\
&\Leftrightarrow\; 9 \leq 9r^2 \leq 81 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq r \leq 3.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
D' &= \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq r \leq 3,\ \pi + \arctan\left(-\frac{1}{3}\right) \leq \varphi \leq \pi\right\} \\
&= [1,3] \times \left[\pi + \arctan\left(-\frac{1}{3}\right), \pi\right].
\end{aligned}$$

(ii) Für die gesuchten Gebiete ergibt sich

(iii) Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ 3\sin(\varphi) & 3r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det \Phi'(r,\varphi) = \cos(\varphi) \cdot 3r\cos(\varphi) - (-r\sin(\varphi) \cdot 3\sin(\varphi)) = 3r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = 3r.$$

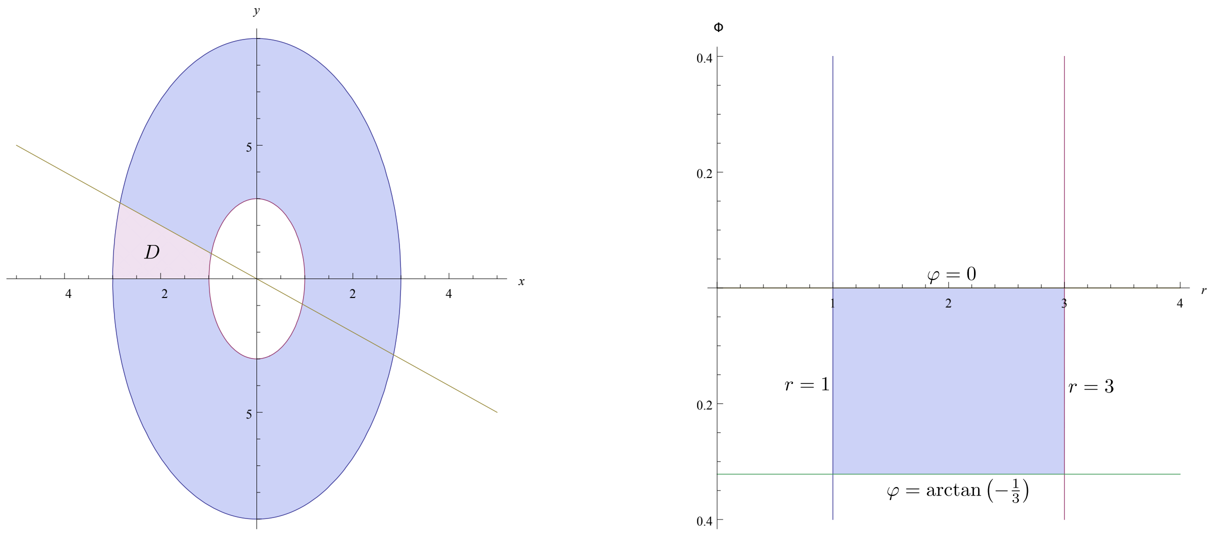

Figure 4: *
Links D, rechts $D' = \Phi^{-1}[D]$.

(iv) Mit $f(x,y) := \frac{xy}{9x^2+y^2}$ gilt

$$\int_D f \, \mathrm{d}\mu = \int_{D'} (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \, \mathrm{d}\mu = \int_{D'} 3r \cdot \frac{r\cos(\varphi) \cdot 3r\sin(\varphi)}{9(r\cos(\varphi))^2 + (3r\sin(\varphi))^2} \, \mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{D'} r\cos(\varphi)\sin(\varphi) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\varphi=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)}^{0} \int_{r=1}^{3} r\cos(\varphi)\sin(\varphi) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_{\varphi=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)}^{0} \underbrace{\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=1}^{3}}_{=\frac{1}{2}\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 4} \cdot \cos(\varphi)\sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_{\varphi=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)}^{0} 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)}^{0} = 2\sin^2(0) - 2\sin^2\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Zu $\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$*:* Sei $\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$. Dann ist

$$\frac{1}{9} = \tan^2(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha)}{1 - \sin^2(\alpha)} \;\Leftrightarrow\; \sin^2(\alpha) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\sin^2(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\; 10\sin^2(\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^2(\alpha) = \frac{1}{10} \underset{\alpha\in[-\pi,0]}{\Rightarrow} \sin(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

43. Polarkoordinaten.

(a) Es sei $R \in (0,\infty]$, $B_R := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2 \,\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um Null in $\mathbb{R}^2$ und $f \in L^1(B_R)$ eine auf B_R beschränkte Funktion, deren

Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden. *Zeige*, dass dann gilt:

$$\int_{B_R} f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r \cdot f(r\,\cos(\varphi),\, r\,\sin(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\ .$$

Diese Formel beschreibt die sogenannte *Integration in Polarkoordinaten.* *(3 Punkte)*

Tipp: Sei $O := B_R \setminus (\,(-\infty,0] \times \{0\} \cup \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 = R^2\,\}\,)$ und $U := (0,R) \times (-\pi,\pi)$ sowie $\Phi : U \to O,\ (r,\varphi) \mapsto (r\,\cos(\varphi), r\,\sin(\varphi))$. Man zeige, dass in dieser Situation die Voraussetzungen der Jacobischen Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt sind. Warum gilt $\int_{B_R} f\,\mathrm{d}\mu = \int_O f\,\mathrm{d}\mu$?

(b) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \exp(-(x^2+y^2))\ .$$

Zeige, dass $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ ist und *berechne* $\int_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

Tipp: Verwende Aufgabenteil (a) und betrachte zunächst $f \cdot \chi_{B_R}$.

(c) Verwende das Ergebnis von (b), um zu *zeigen*, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

gilt. *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Sei

$$O := B_R \setminus \big((-\infty,0] \times \{0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ |\ x^2+y^2 = R^2\}\big) \ \text{ und } U := (0,R) \times (-\pi,\pi).$$

Dann sind O und U offene Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ und es gilt $O \subset B_R$ und $B_R \setminus O$ ist eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$. Deshalb ist

$$\int\limits_{B_R} f \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_O f \,\mathrm{d}\,\mu.$$

Die Abbildung

$$\Phi : U \to O, \quad (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

bildet nach den bekannten Aussagen über die Polardarstellung komplexer Zahlen tatsächlich U bijektiv auf O ab. Die Funktion Φ ist offensichtlich stetig differenzierbar und für $(r,\varphi) \in U$ wird $\Phi'(r,\varphi)$ durch die Matrix

$$\Phi'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Daher gilt

$$\det \Phi'(r,\varphi) = \cos(\varphi)\cdot(r\cos(\varphi)) - \sin(\varphi)\cdot(-r\sin(\varphi)) = r(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)) = r \neq 0.$$

Also sind die Voraussetzungen der Transformationsformel (Satz 12.33) erfüllt. Nach dieser gilt

$$\int\limits_{B_R} f \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_O f \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_U (f\circ\Phi)\cdot \underbrace{|\det \Phi'|}_{=r} \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=-\pi}^{\pi} r\cdot f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r.$$

(b) Sei zunächst $R > 0$ fest. Dann ist B_R eine messbare, beschränkte Menge und $f \cdot \chi_{B_R}$ eine beschränkte, auf B_R stetige Funktion. Daher ist $f \cdot \chi_{B_R} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und

$$0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_{B_R} \,\mathrm{d}\,\mu \overset{(a)}{=} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=-\pi}^{\pi} r \cdot f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}r = \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=-\pi}^{\pi} r \cdot \exp(-r^2) \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int\limits_{0}^{R} r \cdot \exp(-r^2) \,\mathrm{d}r = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} \exp\left(-r^2\right) \right]_0^R = \pi(1 - \underbrace{\exp(-R)}_{<1}) \leq \pi.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $f_n := f \cdot \chi_{B_{R=n}} \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von L^1-Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert und $(\int f_n \,\mathrm{d}\mu)$ ist (durch π) beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi ist daher $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \pi(1 - \exp(-n^2)) = \pi.$$

(c) Es gilt

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x \right)^2 = \left(\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int\limits_{y=-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) \,\mathrm{d}y \right)$$

$$= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\exp(-x^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} \underbrace{\exp\left(-(y^2+x^2)\right)}_{=f(x,y)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\mu \overset{(b)}{=} \pi.$$

und deshalb $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

44. Divergenzsatz

Es seien $Q = [-1,1] \times [-1,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ und $F(x,y,z) = (x^2y, y^2x, z^3)$.

(a) Berechne $\nabla \cdot F$ und $\int_Q \nabla \cdot F$. *(2 Punkte)*

(b) $S_1 := [-1,1] \times [-1,1] \times \{0\} \subset \partial Q$ ist eine Oberfläche des Würfels Q. Ist $N_1 := (0,0,-1)$ auf S_1 eine äußere oder innere Normale? *(1 Punkt)*

(c) Berechne $\int_{\partial Q} F \cdot N \, d\sigma$. *(2 Punkte)*

(d) Sind die Integrale gleich? Gilt Satz 12.40? Was kann man sagen? *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot F &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 2xy + 2yx + 3z^2 \\
&= 4xy + 3z^2. \\
\int_Q \nabla \cdot F &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 4xy + 3z^2 \; dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 2x^2 y + 3xz^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^1 6z^2 \; dy\, dz = \int_0^1 6yz^2 \Big|_{y=-1}^{y=1} dz \\
&= \int_0^1 12z^2 \; dz = 4.
\end{aligned}
$$

(b) S_1 ist der Boden des Würfels, also N_1 ist die äußere Normale.

(c) Auf S_1 ist $z = 0$:

$$
\int_{S_1} F \cdot (0,0,-1) \; d\sigma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -z^3 \; dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 0 \; dx\, dy = 0.
$$

Ähnlich

$$
\begin{aligned}
&S_2 := [-1,1] \times [-1,1] \times \{1\} \quad N_2 = (0,0,1) \\
&\int_{S_2} F \cdot (0,0,1) \; d\sigma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^3 \; dx\, dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 \; dx\, dy = 4 \\
&S_3 := [-1,1] \times \{-1\} \times [0,1] \quad N_3 = (0,-1,0) \\
&\int_{S_3} F \cdot (0,-1,0) \; d\sigma = \int_0^1 \int_{-1}^1 -xy^2 \; dx\, dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 -x \; dx\, dz = 0 \\
&S_4 := [-1,1] \times \{1\} \times [0,1] \quad N_4 = (0,1,0) \\
&\int_{S_4} F \cdot (0,1,0) \; d\sigma = \int_0^1 \int_{-1}^1 xy^2 \; dx\, dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 x \; dx\, dz = 0 \\
&S_5 := \{-1\} \times [-1,1] \times [0,1] \quad N_5 = (-1,0,0) \\
&\int_{S_5} F \cdot (-1,0,0) \; d\sigma = \int_0^1 \int_{-1}^1 -x^2 y \; dy\, dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 -y \; dy\, dz = 0 \\
&S_6 := \{1\} \times [-1,1] \times [0,1] \quad N_6 = (1,0,0) \\
&\int_{S_6} F \cdot (1,0,0) \; d\sigma = \int_0^1 \int_{-1}^1 x^2 y \; dy\, dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 y \; dy\, dz = 0 \\
&\int_{\partial Q} F \cdot N \; d\sigma = \int_{S_1} F \cdot N_1 \; d\sigma + \int_{S_2} F \cdot N_2 \; d\sigma + \int_{S_3} F \cdot N_3 \; d\sigma + \int_{S_4} F \cdot N_4 \; d\sigma \\
&\qquad + \int_{S_5} F \cdot N_5 \; d\sigma + \int_{S_6} F \cdot N_6 \; d\sigma = 4.
\end{aligned}
$$

(d) Die Integrale sind gleich, aber wir können nicht Satz 12.40 direkt benutzen, weil ∂Q keine Untermannigfaltigkeit ist. Die Punkte, in den ∂Q keine Untermannigfaltigkeit ist, sind die Kanten des Würfels, und sie haben kein 2-Maß. Deshalb gibt es eine generellere Version von dem Divergenzsatz als Satz 12.40.