

12. Übung

39. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int (f \cdot \chi_M) d\mu$ für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}^d$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

- (a) $M := [0, a] \times [0, b]$, $f(x, y) := x^2 y^3$ (3 Punkte)
- (b) $M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \}$, $f(x, y) := xy + y^2$. (3 Punkte)
- (c) $M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x \}$, $f(x, y) := \frac{x e^y}{y}$ (4 Punkte)
- (d) $M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$, $f(x, y) := \sin(x) + y + 6$. (4 Punkte)
- (e) $M := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$, $f(x, y, z) := 1$. (5 Punkte)

[Tipp: Man überlege sich, welche Integrationsreihenfolge die sinnvollere ist.]

40. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für } (x, y) \in ([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Berechne $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$. (4 Punkte)
- (b) Folgere aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (2 Punkte)

41. Weitere Grenzwertaussagen für das Lebesgue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

- (a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall $|f| \leq g$. Zeige, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. (3 Bonuspunkte)

[Tipp: Man wende Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n) , wobei

$$g_n := \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}, \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x) \\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x) \end{cases}$$

an. Die Formeln $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ und $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$

- (b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \leq h$ gilt. Zeige, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ gilt. (3 Bonuspunkte)

[Tipp: Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen und dann Lebesgues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]