Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

2. Juni 2021

12. Übung

39. Integralberechnung mit dem Satz von Fubini.

Berechne $\int(f\cdot\chi_M)\,\mathrm{d}\mu$ für die folgenden Mengen $M\subset\mathbb{R}^d$ und Funktionen $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$:

(a) $M := [0,a]\times[0,b],\quad f(x,y) := x^2y^3$ *(3 Punkte)*

(b) $M := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\,\},\quad f(x,y) := xy+y^2.$ *(3 Punkte)*

(c) $M := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\,\},\quad f(x,y) := \frac{xe^y}{y}$ *(4 Punkte)*

(d) $M := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\le 1\,\},\quad f(x,y) := \sin(x)+y+6.$ *(4 Punkte)*

(e) $M := \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\,\},\quad f(x,y,z) := 1.$ *(5 Punkte)*

[*Tipp:* Man überlege sich, welche Integrationsreihenfolge die sinnvollere ist.]

Lösung.

(a)

$$\int(f\cdot\chi_M)\;d\mu = \int\limits_{x=0}^{a}\Big(\int\limits_{y=0}^{b} x^2y^3\;dy\Big)\;dx = \int\limits_{x=0}^{a} x^2\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{b}\;dx$$
$$= \frac{b^4}{4}\int\limits_{x=0}^{a} x^2\;dx = \frac{b^4}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{a} = \frac{a^3b^4}{12}.$$

(b)

$$\int(f\cdot\chi_M)\;d\mu = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=x} xy+y^2\;dy\right)\;dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=x}\;dx$$
$$= \int_{x=0}^{x=1}\frac{5}{6}x^3\;dx = \left[\frac{5}{24}x^4\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{24}.$$

(c) Da wir die Stammfunktion nach y von $\frac{xe^y}{y}$ nicht bestimmen können ist es sinnvoll, erst nach x und dann nach y zu integrieren. Dafür schreiben wir das Gebiet um: Es ist $0\le x\le 1, x^2\le y\le x \Leftrightarrow 0\le y\le 1, y\le x\le\sqrt{y}$ und somit

$$\int(f\cdot\chi_M)\;d\mu = \int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\frac{xe^y}{y}\;dx\right)\;dy = \int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{x^2e^y}{2y}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\;dy$$
$$= \int_{y=0}^{y=1}\frac{ye^y}{2y}-\frac{y^2e^y}{2y}\;dy = \int_{y=0}^{y=1}\frac{1}{2}e^y-\frac{1}{2}ye^y\;dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^y-\frac{1}{2}(y-1)e^y\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}e-0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e-1.$$

(d) Es ist

$$\begin{aligned} M :&= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\Big\} \\ &= \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le y\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\Big\}. \end{aligned}$$

Zudem ist

$$\int (f\cdot\chi_M)\, d\mu = \underbrace{\int \sin(x)\cdot\chi_M\, d\mu}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\int y\cdot\chi_M\, d\mu}_{(\mathrm{II})} + \underbrace{\int 6\cdot\chi_M\, d\mu}_{(\mathrm{III})}.$$

Dann ergibt sich für das Integral aus (I)

$$\begin{aligned} \int_{y=-1}^{1}\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x)\, dx\, dy &= \int_{y=-1}^{1} \Big[-\cos(x)\Big]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{y=-1}^{1} \underbrace{-\cos(\sqrt{1-y^2})+\cos(-\sqrt{1-y^2})}_{=0}\, dy = 0 \end{aligned}$$

Es reicht auch aus, die Symmetrie des Gebiets und die Punktsymmetrie zum Ursprung von $\sin(x)$ *als Argument anzugeben.*

Analog erhält man für das Integral aus (II), aufgrund der Symmetrie des Gebiets und da y eine ungerade Funktion ist, dass

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\, dydx = 0.$$

Es bleibt also nur das Integral aus (III). Für dieses ergibt sich

$$\int_M 6\chi_M\, d\mu = 6\underbrace{\mu(M)}_{=\pi} = 6\pi.$$

Alternativ:

$$\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 6\, dydx = \int_{x=-1}^{1} \Big[6y\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 12\int_{x=-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx$$

Durch Substitution $x=\cos(t)$ (mit $\cos:[0,\pi)\to[-1,1]$ bijektiv) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{x=-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_{t=\arccos(-1)}^{\arccos(1)} \sqrt{1-\cos(t)^2}\cdot(-\sin(t))\, dt \\ &= -\int_{\pi}^{0}\sin^2(t)\, dt = \int_{0}^{\pi}\sin^2(t)\, dt \overset{\text{Ana 1}}{=} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Also ist insgesamt $\int f\cdot\chi_M\, d\mu = 12\frac{\pi}{2} = 6\pi$.

(e) Für fest x betrachten wir die Menge $M_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}$. Dann schreiben wir $\chi_M(x,y,z) = \chi_{[-1,1]}(x)\chi_{M_x}(y,z)$. Also nach dem Satz von Fubini

$$\int (f \cdot \chi_M)\, d\mu = \int \chi_{[-1,1]}(x) \left(\int f(x,y,z)\chi_{M_x}(y,z)\, d\mu(y,z) \right) d\mu(x)$$

Wir müssen das innere Integral integrieren. Das Gebiet ist ein Kreis wie in (d), mit Radius $\sqrt{1-x^2}$. So M_x ist $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ und $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$\begin{aligned}
\int f(x,y,z)\chi_{M_x}(y,z)\, d\mu(y,z) &= \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz \right) dy \\
&= \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} 1\, dz \right) dy \\
&= \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2-y^2}\, dy \\
&= \left[y\sqrt{1-x^2-y^2} + (1-x^2)\operatorname{atan}\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \pi(1-x^2).
\end{aligned}$$

Endlich können wir berechnen

$$\int (f \cdot \chi_M)\, d\mu = \int \chi_{[-1,1]}(x)\pi(1-x^2)\, d\mu(x) = \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\, dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

40. Eine Funktion, die nicht Lebesgue-integrierbar ist.

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für } (x,y) \in ([0,1] \times [0,1]) \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) *Berechne* $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ und $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. *(4 Punkte)*

(b) *Folgere* aus dem Ergebnis von (a), dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Bestimme zunächst die Stammfunktion von $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ bzgl. x. Dazu schreiben wir den Bruch zunächst als

$$\frac{x-y}{(x+y)^3} = \frac{x+y-2y}{(x+y)^3} = \underbrace{\frac{1}{(x+y)^2}}_{\text{(I)}} - \underbrace{\frac{2y}{(x+y)^3}}_{\text{(II)}}.$$

Nach der Formel im Skript auf Seite 95 (Termweise Integration) erhalten wir für die Stammfunktion von (I) mit $k = 2$ und $x_i = -y$ und einer Konstanten C

$$\int \frac{1}{(x+y)^2}\, dx = -\frac{1}{(x+y)} + C$$

und für (II) mit $k = 3$ und $x_i = -y$

$$\int \frac{2y}{(x+y)^3}\ dx = \frac{-2y}{2(x+y)^2} + C = \frac{-y}{(x+y)^2} + C$$

und daher

$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\ dx = -\frac{1}{(x+y)} - \frac{-y}{(x+y)^2} + C = \frac{-1\cdot(x+y)+y}{(x+y)^2} + C = -\frac{x}{(x+y)^2} + C.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} f(x,y)\ dxdy &= \int_{y=0}^{1}\Big[-\frac{x}{(x+y)^2}\Big]_{x=0}^{1}\ dy = \int_{y=0}^{1} -\frac{1}{(1+y)^2}\ dy\\ &= \Big[\frac{1}{1+y}\Big]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Wegen $f(y,x) = -f(x,y)$ ist

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\ dydx &\overset{\substack{\text{Umbenennung}\\ \text{von } x \text{ und } y}}{=} \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} f(y,x)\ dxdy\\ &\overset{f(y,x)=-f(x,y)}{=} -\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} f(x,y)\ dxdy \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) Wäre $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, so würden die beiden in (a) berechneten Integrale nach dem Satz von Fubini (Korollar 12.21) übereinstimmen. Da dies aber nach (a) nicht der Fall ist, kann f nicht Lebesgue-integrierbar sein.

41. Weitere Grenzwertaussagen für das Lebesgue-Integral.

Es sei (f_n) eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergiert.

(a) Es existiere ein $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass fast überall $|f| \le g$. *Zeige,* dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. *(3 Bonuspunkte)*

[*Tipp:* Man wende Lebesgues Satz der beschränkten Konvergenz (Korollar 12.24) auf die Folge (g_n), wobei

$$g_n := \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}\,, \quad \text{d.h.} \quad g_n(x) \overset{a.e.}{=} \begin{cases} g(x) & \text{für } f_n(x) > g(x)\\ f_n(x) & \text{für } -g(x) \le f_n(x) \le g(x)\\ -g(x) & \text{für } f_n(x) < -g(x)\end{cases}$$

an. Die Formeln $\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$ und $\min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ für $x, y \in \mathbb{R}$

(b) Es existiere ein $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast überall $|f_n - f| \leq h$ gilt. *Zeige*, dass dann auch $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist und dass $\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$ gilt.

(3 Bonuspunkte)

[*Tipp:* Man verwende zunächst (a), um $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen und dann Lebesgues Satz, um die Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert zu beweisen.]

Lösung.

(a) Wir definieren g_n wie im Tipp. Es gilt

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|) \quad \text{und} \quad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Wegen $g_n = \max\{-g, \min\{f_n, g\}\}$ folgt aus $f_n, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit Satz 12.14(iii), dass $g_n \in L^1(\mathbb{R})$. Offenbar gilt $|g_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus obigen Formeln für max und min folgt auch, dass die Funktionen $\max\{c, \cdot\}$ und $\min\{\cdot, c\}$ für festes $c \in \mathbb{R}$ stetig sind. Daher gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $|f(x)| \leq g(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (das sind nach Voraussetzung fast alle $x \in \mathbb{R}^d$):

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \max\{-g(x), \min\{f_n(x), g(x)\}\} \\ &= \max\{-g(x), \min\{f(x), g(x)\}\} = f(x).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit gilt, da $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ und max sowie min stetig für festes x und das dritte aus $|f(x)| \leq g(x)$. Also konvergiert g_n fast überall gegen f. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(b) Speziell für $n = 1$ gilt $|f_1 - f| \leq h$ und somit

$$|f| = |f_1 - (f_1 - f)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |f_1| + |f_1 - f| \leq |f_1| + h.$$

Dabei ist $g := |f_1| + h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ wegen $f_1, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und Satz 12.14(iii). Mit (a) folgt $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Nun gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n| = |f + (f_n - f)| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |f_n| + |f_n - f| \leq |f| + h.$$

Dabei ist $k := |f| + h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ wegen $f, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und Satz 12.14(iii). Daher erfüllt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes von Lebesgue. Nach diesem ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$