Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

26. Mai 2021

11. Übung

34. Integralberechnungen auf offenen und geschlossenen Intervallen.

(a) Betrachte $f(x) = x^2 \cdot \chi_{[-1,2]}(x)$, $g(x) = \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)}(x)$ und $h(x) = e^x \cdot \chi_{(0,1)}(x)$. Warum sind sie $L^1(\mathbb{R})$? *(1 Punkt)*

(b) Berechne mit dem Lebesguekriterium (Satz 12.17)

$$\int x^2 \cdot \chi_{[-1,2]}\,\mathrm{d}\mu, \qquad \int \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)}\,\mathrm{d}\mu, \qquad \text{und} \int e^x \cdot \chi_{(0,1)}\,\mathrm{d}\mu.$$

(4 Punkte)

35. Eine Integralberechnung auf $\mathbb{R}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := e^{-|x|} \cdot \chi_{[-n,n]}$. *Berechne* $\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $f(x) := e^{-|x|}$. *Folgere* aus (a) mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist und *berechne* $\int f\,\mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

36. Eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) *Finde* eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. *(2 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechne $\int f_n\,\mathrm{d}\mu$. *(4 Punkte)*

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi, dass f Lebesgue-integrierbar ist und *berechne* den Wert des Integrals $\int f\,\mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

37. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$

(a) *Skizziere* die Funktionen f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(1 Punkt)*

(b) *Zeige*, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen bestehen und gegen $f \equiv 0$ konvergieren. *(2 Punkte)*

(c) *Untersuche*, ob

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$$

gilt. *(2 Punkte)*

(d) *Gebe an*, welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lebesgue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind und begründe dieses. *(2 Punkte)*

38. Eine Funktion, die nicht lebesgueintegrabel aber uneigentlich riemannintegrabel ist

Seien

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k \leq x < 2k+1 \\ -\frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k+1 \leq x < 2k+2. \end{cases}$$

und $f_n := f \cdot \chi_{[-n,n]}$.

(a) Zeige, dass

$$\int f_n \, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ \frac{2}{n+1} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

(2 Bonuspunkte)

(b) Warum ist f uneigentlich riemannintegrabel auf $\mathbb{R}$? *(2 Bonuspunkte)*

(c) Berechnen $\int |f_n| \, d\mu$. Zeige, dass $|f| \notin L^1(\mathbb{R})$. *(2 Bonuspunkte)*

(d) Warum ist f nicht lebesgueintegrabel? *(1 Bonuspunkt)*