Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

26. Mai 2021

11. Übung

34. Integralberechnungen auf offenen und geschlossenen Intervallen.

(a) Betrachte $f(x) = x^2 \cdot \chi_{[-1,2]}(x)$, $g(x) = \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)}(x)$ und $h(x) = e^x \cdot \chi_{(0,1)}(x)$. Warum sind sie $L^1(\mathbb{R})$? *(1 Punkt)*

(b) Berechne mit dem Lebesguekriterium (Satz 12.17)

$$\int x^2 \cdot \chi_{[-1,2]} \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)} \, \mathrm{d}\mu, \qquad \text{und} \int e^x \cdot \chi_{(0,1)} \, \mathrm{d}\mu.$$

(4 Punkte)

Lösung.

(a) Satz 12.15 sagt: Eine beschränkte Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge verschwindet und deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden, gehört zu $L^1(\mathbb{R}^d)$. Sie sind alle Null außerhalb $[-1, 2]$, $[0, \pi)$ und $(0, 1)$. f hat Unstetigkeiten auf $\{-1, 2\}$ und h auf $\{0, 1\}$. g is stetig.

(b) f, g sind stetig auf den geschlossenen Intervalle $[-1, 2]$, $[0, \pi]$ und deshalb sind Riemannintegrabel nach Satz 8.26(i) von Analysis I. Wir können daher den Hauptsatz der Integralrechnung (Satz 8.27) benutzen:

$$\int x^2 \cdot \chi_{[-1,2]} \, \mathrm{d}\mu \text{ (Leb)} \;=\; \int_{-1}^{2} x^2 \cdot \chi_{[-1,2]} \, dx \text{ (Rie)} \;=\; \int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 3.$$

$$\int \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)} \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\pi \sin x \cdot \chi_{[0,\pi)} \, dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Aber h ist nicht stetig auf der geschlossenen Intervall $[0, 1]$. Auf welchem Gründ kann wir denn sagen, dass h Riemannintegrabel ist? Hier haben wir zwei Optionen.

1) Betrachte $\tilde{h}(x) = e^x \cdot \chi_{[0,1]}(x)$. Sie ist stetig auf $[0, 1]$ und übereinstimmt zu $h(x)$ fast überall, also $\int h \, \mathrm{d}\mu = \int \tilde{h} \, \mathrm{d}\mu$ und

$$\int \tilde{h} \, \mathrm{d}\mu = \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

2) Wir können zeigen, dass h auf $[0, 1]$ eine Regelfunktion ist. In Satz 8.3(i) seien $v(x) = w(x) = \tilde{h}(x)$. Es folgt denn, dass h eine Regelfunktion ist und wir können noch den Hauptsatz benutzen, weil alle Regelfunktionen Riemannintegrabel sind.

35. Eine Integralberechnung auf $\mathbb{R}$.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := e^{-|x|} \cdot \chi_{[-n,n]}$. *Berechne* $\int f_n \,\mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

(b) Sei $f(x) := e^{-|x|}$. *Folgere* aus (a) mit Hilfe des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22), dass $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist und *berechne* $\int f \,\mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

Lösung.

(a)

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{-n}^{n} e^{-|x|} \,dx = \int_{-n}^{0} e^{x} \,dx + \int_{0}^{n} e^{-x} \,dx$$
$$= [e^x]_{-n}^0 + [-e^{-x}]_0^n = 1 - e^{-n} - e^{-n} + 1 = 2 - 2e^{-n}.$$

(b) Die Folge $\left(\int f_n \,\mathrm{d}\mu\right)$ ist beschränkt zwischen 0 und 2. Und die Folge $f_n(x)$ ist monoton wachsend für jede $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < |x| \\ e^{-|x|} & \text{für } n \geq |x|. \end{cases}$$

und $e^{-|x|} > 0$. Das zeigt außerdem, dass $f_n \to f$. Deshalb sagt der Satz von Beppo-Levi, dass $f \in L^1$ und

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} 2 - 2e^{-n} = 2.$$

36. Eine Lebesgue-integrierbare Funktion, die nicht beschränkt ist.

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in [0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrabel ist, obwohl $f(x)$ in der Nähe von $x = 1$ nicht beschränkt ist.

(a) *Finde* eine monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen (nicht unbedingt Treppenfunktionen) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$, die fast überall (punktweise) gegen f konvergiert. *(2 Punkte)*

(b) *Begründe*, dass f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ Lebesgue-integrierbar ist und berechne $\int f_n \,\mathrm{d}\mu$. *(4 Punkte)*

(c) Folgere mittels des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi, dass f Lebesgue-integrierbar ist und *berechne* den Wert des Integrals $\int f \,\mathrm{d}\mu$. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Kurz können wir schreiben $f_n := f \cdot \chi_{[0,1-1/n]}$. Wegen $f \geq 0$ und $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \subset \left[0, 1 - \frac{1}{n+1}\right]$ ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Obige Begründung reicht, genauer sieht man dies wie folgt:

$$f_{n+1} - f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases},$$

also $f_n \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ist $x \in [0, 1)$, so gilt $f_n(x) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \frac{1}{1-x}$, denn dann ist $x < 1 - \frac{1}{n}$. Ist $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1)$, so gilt $f_n(x) = 0 = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In jedem Fall ist also $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

(b) Die Funktion f_n ist beschränkt (wegen $f_n[\mathbb{R}] = \{0\} \cup f_n\left[\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]\right]$ und weil die auf dem Kompaktum $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ stetige Funktion f_n dort Maximum und Minimum annimmt). Sie verschwindet außerhalb der beschränkten Menge $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ und die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen $\left\{0, 1 - \frac{1}{n}\right\}$ bildet eine Nullmenge. Nach Satz 12.15 folgt $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Nach Satz 12.17 ist f_n sogar Riemann-integrabel und es gilt

$$\int f_n \, d\mu = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) \, dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \Big[\arcsin(x)\Big]_{x=0}^{1-\frac{1}{n}} = \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

(c) Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $L^1(\mathbb{R})$ ist und da für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\int f_n \, d\mu = \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

sind die Voraussetzunges des Satzes von Beppo Levi (Satz 12.22) erfüllt. Daher ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \overset{\substack{\text{arcsin}\\\text{stetig}}}{=} \arcsin(1 - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

37. Warnung vor bedenkenlosem Vertauschen von Integration und Grenzwertbildung.

Betrachte die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := \frac{1}{n} \cdot \chi_{[0,n]}$

(a) *Skizziere* die Funktionen f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(1 Punkt)*

(b) *Zeige*, dass die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Lebesgue-integrierbaren Funktionen bestehen und gegen $f \equiv 0$ konvergieren. *(2 Punkte)*

(c) *Untersuche*, ob

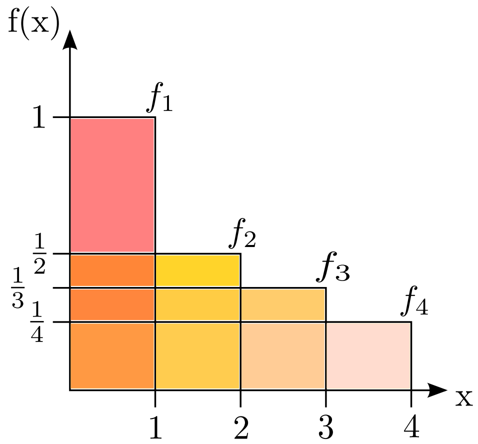
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$$

gilt. *(2 Punkte)*

(d) *Gebe an*, welche der Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz von Beppo Levi (Satz 12.22) und des Satzes der beschränkten Konvergenz von Lebesgue (Korollar 12.24) erfüllt bzw. nicht erfüllt sind und begründe dieses. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a)



(b) f_n ist eine Treppenfunktion. Deshalb gilt $f_n \in L^1(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ und daher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(c) Es gilt

$$\int f_n \, d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu([0,n]) = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 1 \neq 0$.

(d) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zwar beschränkte Integrale, ist aber nicht monoton, denn z.B. ist

$$(f_2 - f_1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0, \text{ aber } (f_2 - f_1)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Sie konvergiert zwar (fast) überall gegen $f = 0$, aber es gibt kein $k \in L^1(\mathbb{R})$ mit $|f_n| \leq k$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn gäbe es ein solches k, so würde für $x \in [n-1, n]$ gelten, dass

$$k(x) \geq \max_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \frac{1}{n},$$

also $k \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n]}$ und somit

$$\int k \, d\mu \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\mu([n-1,n])}_{=1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty \qquad \text{Widerspruch zu } k \in L^1(\mathbb{R}).$$

38. Eine Funktion, die nicht lebesgueintegrabel aber uneigentlich riemannintegrabel ist

Seien

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k \leq x < 2k+1 \\ -\frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k+1 \leq x < 2k+2. \end{cases}$$

und $f_n := f \cdot \chi_{[-n,n]}$.

(a) Zeige, dass

$$\int f_n \, d\mu = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } n \\ \frac{2}{n+1} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

(2 Bonuspunkte)

(b) Warum ist f uneigentlich riemannintegrabel auf $\mathbb{R}$? *(2 Bonuspunkte)*

(c) Berechnen $\int |f_n| \, d\mu$. Zeige, dass $|f| \notin L^1(\mathbb{R})$. *(2 Bonuspunkte)*

(d) Warum ist f nicht lebesgueintegrabel? *(1 Bonuspunkt)*

Lösung.

(a) Für gerade $n = 2m$ haben wir

$$\begin{aligned} \int f_n \, d\mu = \int_0^{2m} f(x) \, dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{2k}^{2k+1} f(x) \, dx + \int_{2k+1}^{2k+2} f(x) \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{k+1} \, dx + \int_{2k+1}^{2k+2} -\frac{1}{k+1} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Und für ungerade $n = 2m+1$ haben wir

$$\int f_n \, d\mu = \int_0^{2m} f(x) \, dx + \int_{2m}^{2m+1} f(x) \, dx = 0 + \frac{1}{m+1} = \frac{2}{n+1}.$$

(b) Bemerke, dass für $2k \le b \le 2k+1$

$$\int_0^b f(x) \, dx = \int_0^{2k} f(x) \, dx + \int_{2k}^b f(x) \, dx = 0 + \int_{2k}^b \frac{1}{k+1} \, dx = \frac{b-2k}{k+1}.$$

Also liegt das Integral zwischen 0 und $\frac{1}{k+1}$. Ähnlich, das gilt auch für $2k+1 \le b \le 2k+2$. Deshalb

$$0 \le \int_0^b f(x) \, dx \le \frac{2}{b}$$

für $b > 0$. Wegen des Sandwichregel folgt $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x) \, dx = 0$. Das heißt, dass f uneigentlich riemannintegrabel nach Definition 8.31 ist.

(c) $|f_n|$ ist einfacher als f_n, weil es eine monotone fallende Funktion ist:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } 2k \le x < 2k+2 \\ 0 & \text{für } x > n. \end{cases}$$

Wir können auch es als Treppenfunktion schreiben. Für gerade $n = 2m$ haben wir

$$\int |f_n| \, d\mu = \int \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \chi_{[2k,2k+2)} \, d\mu = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k+1}$$

Und für ungerade $n = 2m + 1$ haben wir

$$\int |f_n| \, d\mu = \sum_{k=0}^{m-1} \int \frac{1}{k+1} \chi_{[2k,2k+2)} \, d\mu + \int \frac{1}{m+1} \chi_{[2m,2m+1)} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2}{k+1} \right) + \frac{1}{m}$$

Auf beidem Fällen sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \int |f_n| \, d\mu = \infty$. Weil $|f_n| \to |f|$ für eine monotone wachsende Folge von Funktionen, das zeigt, dass $|f| \notin L^1$.

(d) Wenn $f \in L^1$, dann liegt auch $|f| \in L^1$. Aber $|f| \notin L^1$ und daher $f \notin L^1$.