Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

19. Mai 2021

10. Übung

30. Die ganze Speisekarte

Begründe, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 4$$

auf der Menge

$$M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 27y^2 \leq x^3, x \leq 3 \}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert.

(7 Punkte)

[*Tipp:* Betrachte das Innere $M^\circ := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 27y^2 < x^3, x < 3 \}$ und den Rand $\partial M := M_1 \cup M_2$ einzeln, für $M_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 27y^2 = x^3 \} \cap M$ und $M_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3 \} \cap M$.]

31. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des $\mathbb{R}^d$.

- **(i)** *Zeige:* $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(2 Punkte)*
- **(ii)** *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(1 Punkt)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun A, B zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. *Zeige*:

- **(i)** $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ *(2 Punkte)*
- **(ii)** $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ *(2 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. *Zeige*, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(2 Bonuspunkte)*

32. Nullmengen.

(a) Die Teilmenge

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

des $\mathbb{R}^n$ heißt eine Hyperebene. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten Sie die offenen Quader

$$Q_k := (-k, k) \times \dots \times (-k, k) \times (-a_k, a_k)$$

mit $a_k := \varepsilon\, 2^{-k-1}(2k)^{-n+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. *Zeige*, dass H eine Nullmenge ist.

(2 Punkte)

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist. *(4 Punkte)*

Tipp: Begründe zunächst, warum es ausreicht, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Kantenlänge 1 zu betrachten, d.h. $|a_i - b_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n-1$. Um zu zeigen, dass $G(f)|_Q$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k, auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y \in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

33. Lesbegue-integrable Funktionen.

(a) *Zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0,2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 2]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist und *berechne* $\int f \, \mathrm{d}\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie.

(2 Punkte + 2 Bonuspunkte + 1 Punkt)

(b) *Zeige*, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel ist. *(2 Punkte)*

(c) *Berechne* $\int g \, \mathrm{d}\mu$ für die Funktion g aus (b). *(2 Bonuspunkte)*

[*Tipp:* Man benutze die Reihendarstellung von e.]