Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

19. Mai 2021

10. Übung

30. Die ganze Speisekarte

Begründe, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 4$$

auf der Menge

$$M := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 \leq x^3, x \leq 3 \,\}$$

Maximum und Minimum annimmt und *bestimme* den maximalen und den minimalen Wert.

(7 Punkte)

[*Tipp:* Betrachte das Innere $M^\circ := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 < x^3, x < 3 \,\}$ und den Rand $\partial M := M_1 \cup M_2$ einzeln, für $M_1 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 27y^2 = x^3 \,\} \cap M$ und $M_2 = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 3 \,\} \cap M$.]

Lösung. Seien $g_1(x, y) = 27y^2 - x^3$ und $g_2(x, y) = x - 3$. Es folgt $27y^2 \leq x^3 \Leftrightarrow 27y^2 - x^3 \leq 0 \Leftrightarrow g_1(x, y) \leq 0 \Leftrightarrow g(x, y) \in (-\infty, 0] \Leftrightarrow (x, y) \in g_1^{-1}[(-\infty, 0]]$. Also $M = g_1^{-1}((-\infty, 0]) \cap g_2^{-1}((-\infty, 0])$

M ist abgeschlossen: $(-\infty, 0]$ ist abgeschlossen und g_1 und g_2 sind stetig.
M ist beschränkt: Da $0 \leq 27y^2 \leq x^3$ gilt $0 \leq x$. d.h. $0 \leq x \leq 3$. Und $27y^2 \leq x^3 \leq 3^3 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$.
Deshalb ist M kompakt. Da f stetig und M kompakt ist, nimmt f sein Maximum und Minimum auf M an.

Um Extrema von f auf M zu bestimmen, müssen verschiedene Arten möglicher Kandidaten für diese untersuchen:

Singularitäten der Niveaumenge M_1: $\nabla g_1(x, y) = (-3x^2, 54y) = (0, 0) \ \Leftrightarrow x = y = 0$, also $(x, y) = (0, 0)$.

Singularitäten der Niveaumenge M_2: $\nabla g_2(x, y) = (1, 0) \neq (0, 0)$. Also gibt es keine Singularitäten auf M_2.

Andere nicht-glatte Punkte des Rand: Ein Punkt p von $M_1 \cap M_2$ muss nicht ein glatter Punkt von ∂M sein, weil hier $\partial M \cap U \neq F^{-1}[\{z\}]$ ist, für eine offene Teilmenge U und Funktion $F : U \to Y$. Deshalb können wir in p nicht den Satz über implizierte Funktion benutzen. Diese Punkte sind $(3, 1)$ und $(3, -1)$.

Kritische Punkte von f auf M°: In diesen Punkten muss $\nabla f = 0$ gelten. $\nabla f = (2x - 4, 2y)$, und sie ist Null nur für $(2, 0)$.

Kritische Punkte von f auf M_1: In Punkten, denen auf der glatten Teil von M_1 liegt, können wir Lagrangemultiplikatoren benutzen. $\nabla g_1 = (-3x^2, 54y)$. Die drei Gleichungen sind I: $2x - 4 = \lambda(-3x^2)$, II: $2y = \lambda 54y$ und III: $27y^2 = x^3$. Nach II haben wir $\lambda = 1/27$. Dann I ist $x^2 + 18x - 36$, also $x = -9 \pm \sqrt{117}$ und zwar $x = -9 + \sqrt{117} \approx 1.817$, weil $0 \leq x \leq 3$. Es gibt zwei Möglichkeit, $(-9 + 3\sqrt{13}, \pm(-3 + \sqrt{13})^{1.5})$

Kritische Punkte von f auf M_2: $\nabla g_2 = (1,0)$. Die drei Gleichungen sind I: $2x - 4 = \lambda$, II: $2y = \lambda \cdot 0$ und III: $x = 3$. Die eindeutige Lösung ist $(3,0)$ mit $\lambda = 2$.

Jetzt haben wir verschiedene möglicher Kandidaten:

Punkt	f
$(0,0)$	4
$(3,1)$	2
$(3,-1)$	2
$(2,0)$	0
$(-9+3\sqrt{13}, (-3+\sqrt{13})^{1.5})$	0.255
$(-9+3\sqrt{13}, -(-3+\sqrt{13})^{1.5})$	0.255
$(3,0)$	1

Deshalb das Maximumpunkt ist $(0,0)$ mit Wert 4 und das Minimumpunkt ist $(2,0)$ mit Wert 0.

31. Über Quader, Treppenfunktionen und charakteristische Funktionen.

(a) Seien Q_1, Q_2 zwei Quader des $\mathbb{R}^d$.

- **(i)** *Zeige:* $Q_1 \cap Q_2$ ist die leere Menge oder ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(2 Punkte)*
- **(ii)** *Beweise oder widerlege:* $Q_1 \cup Q_2$ ist ein Quader des $\mathbb{R}^d$. *(1 Punkt)*

(b) Wie in der Vorlesung definieren wir zu einer jeden Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die *charakteristische Funktion* $\chi_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus M$. Es seien nun A, B zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. *Zeige*:

- **(i)** $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ *(2 Punkte)*
- **(ii)** $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ *(2 Punkte)*

(c) Es seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen. *Zeige*, dass dann auch

$$f + g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

Treppenfunktionen sind. *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) **(i)** Man mache sich zunächst klar, dass der Schnitt zweier Intervalle von $\mathbb{R}$ wieder ein Intervall ist. Z.B. gilt für abgeschlossene Intervalle (mit $a \le b, c \le d$).

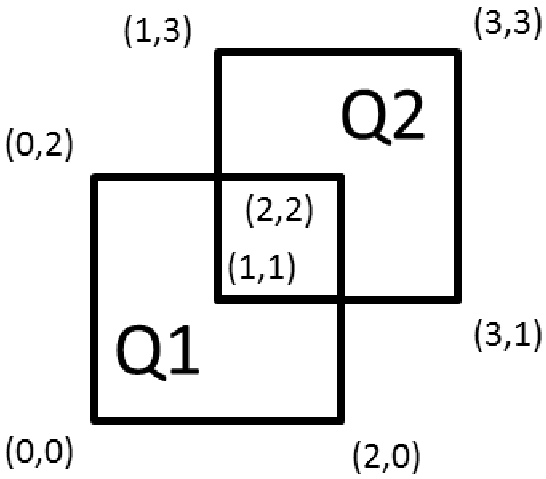
$$[a,b] \cap [c,d] = \begin{cases} [a,b] & \text{falls } c \le a \le b \le d, \\ [c,d] & \text{falls } a \le c \le d \le b, \\ [a,d] & \text{falls } c \le a \le d \le b, \\ [c,b] & \text{falls } a \le c \le b \le d, \\ \emptyset & \text{sonst .} \end{cases}$$

Für (halb-)offene Intervalle analog.
Betrachte nun die zwei Quader $Q_n = I_{n,1} \times \ldots \times I_{n,d}$ für $n \in \{1,2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q_1 \cap Q_2 &= (I_{1,1} \times \ldots \times I_{1,d}) \cap (I_{2,1} \times \ldots \times I_{2,d}) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j \in I_{1,j}\} \cap \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j \in I_{2,j}\} \\ &= \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j \in I_{1,j} \cap I_{2,j}\} \\ &= (I_{1,1} \cap I_{2,1}) \times \ldots \times (I_{1,d} \cap I_{2,d}) \end{aligned}$$

Da $I_{1,j} \cap I_{2,j}$ für $j = 1 \ldots d$ nach dem Vorangegangenen Intervalle sind ist $Q_1 \cap Q_2$ ein Quader.

(ii) Das ist im Allgemeinen nicht so. Z.B. ist für $d = 2$ sowohl $Q_1 := [0,2] \times [0,2]$ als auch $Q_2 := [1,3] \times [1,3]$ ein Quader, aber $Q_1 \cup Q_2$ ist offenbar kein Quader:



(b) **(i)** Sei $x \in \mathbb{R}^d$ vorgegeben. Es gibt vier unterschiedliche Fälle:

1. Fall: $x \in A, x \in B$. Dann ist $x \in A \cap B$ und deshalb

$$\chi_{A \cap B}(x) = 1 = 1 \cdot 1 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

2. Fall: $x \in A, x \notin B$. Dann ist

$$\chi_{A \cap B}(x) = 0 = 1 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

3. Fall: $x \notin A, x \in B$. Analog zu Fall 2.

4. Fall: $x \notin A, x \notin B$. Dann ist

$$\chi_{A \cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^d$ vorgeben. Dann betrachten wir wieder die vier Fälle:

1. Fall: $x \in A, x \in B$. Dann ist

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1 = \chi_{A \cup B}(x).$$

2. Fall: $x \in A, x \notin B$. Dann ist

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1 = \chi_{A \cup B}(x).$$

3. Fall: $x \notin A, x \in B$. Analog zu Fall 2.

4. Fall: $x \notin A, x \notin B$. Dann ist

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0 = \chi_{A \cup B}(x).$$

(c) Sei etwa $f = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{Q_i}$ und $g = \sum_{j=1}^\ell b_j \cdot \chi_{\widetilde{Q}_j}$ mit $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell \in \mathbb{R}$ und $Q_1, \dots, Q_k, \widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_\ell$ endliche Quader in $\mathbb{R}^d$. Dann ist

$$f + g = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{Q_i} + \sum_{j=1}^\ell b_j \cdot \chi_{\widetilde{Q}_j}$$

eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen endlicher Quader, d.h. eine Treppenfunktion. Außerdem gilt

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=1}^k a_i \cdot \chi_{Q_i} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^\ell b_j \cdot \chi_{\widetilde{Q}_j} \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell \underbrace{a_i b_j}_{=:c_{i,j}} \cdot \chi_{Q_i} \cdot \chi_{\widetilde{Q}_j} \overset{\text{(b)(i)}}{=} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell c_{i,j} \chi_{Q_i \cap \widetilde{Q}_j}.$$

Da nach (a)(i) gilt, dass $Q_i \cap \widetilde{Q}_j$ jeweils wieder ein Quader ist, folgt aus dieser Darstellung, dass auch $f \cdot g$ eine Treppenfunktion ist.

32. Nullmengen.

(a) Die Teilmenge

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

des $\mathbb{R}^n$ heißt eine Hyperebene. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Betrachten Sie die offenen Quader

$$Q_k := (-k, k) \times \cdots \times (-k, k) \times (-a_k, a_k)$$

mit $a_k := \varepsilon\, 2^{-k-1}(2k)^{-n+1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. *Zeige*, dass H eine Nullmenge ist.

(2 Punkte)

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und deren Graph sei gegeben durch

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass $G(f)$ eine Nullmenge ist. *(4 Punkte)*

Tipp: Begründe zunächst, warum es ausreicht, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit Kantenlänge 1 zu betrachten, d.h. $|a_i - b_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n-1$. Um zu zeigen, dass $G(f)|_Q$ eine Nullmenge ist zerlege man diesen Quader in endlich viele Teilquader Q_k, auf denen man die Schwankung $\sup_{x,y \in Q_k} |f(x) - f(y)|$ kontrollieren kann.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir einen offenen Quader

$$Q_k := (-k, k) \times \cdots \times (-k, k) \times (-a_k, a_k)$$

mit

$$a_k := \frac{\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}}.$$

Offenbar ist dann $H \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{n-1} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}(2k)^{n-1}} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon \left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) = \varepsilon(2-1) = \varepsilon.$$

Somit ist H also eine Nullmenge.

(b) Es genügt, die Funktion f auf einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit der Kantenlänge 1 zu betrachten, da $\mathbb{R}^{n-1}$ mit abzählbar vielen solcher Quader überdeckt werden kann. Wir zeigen also, dass die Menge

$$G(f)|_Q := \{(x, f(x)) \mid x \in Q \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$$

eine Nullmenge ist. Die Behauptung ergibt sich dann daraus, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.
Da f auf Q gleichmäßig stetig ist gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in Q$ mit $\|x - y\|_\infty < \delta$. Wir wählen nun eine natürliche Zahl $k > \frac{2}{\delta}$ und zerlegen Q durch äquidistante Einteilung der Kanten in k^{n-1} Teilwürfel mit Seitenlänge $\frac{1}{k}$. Zu jedem dieser Teilwürfel bestimme man einen offenen "Oberwürfel" mit Kantenlänge kleiner $\frac{2}{k}$ und größer $\frac{1}{k}$.
Gemäß der Wahl von k ist $\|x - y\|_\infty \leq \frac{2}{k} < \delta$ und damit die Schwankung $\max |f(x) - f(y)|$ auf diesem offenen Oberwürfel kleiner als ε. Der Graph von $f|_Q$ wird daher von k^{n-1} offenen Quadern mit dem Volumen kleiner $\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} \varepsilon$ überdeckt (dieses Volumen ergibt sich aus der maximalen Fläche $\left(\frac{2}{k}\right)^{n-1}$ des Teilwürfels im $\mathbb{R}^{n-1}$ mal der Höhe ε). Somit haben wir eine Überdeckung des Graphen von f über dem Quader Q mit endlich vielen offenen Quadern, deren Volumen sich zusammen abschätzen lassen durch

$$k^{n-1} \left(\frac{2}{k}\right)^{n-1} \varepsilon = 2^{n-1}\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt hieraus die Behauptung.

33. Lesbegue-integrable Funktionen.

(a) *Zeige*, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{falls } x \in [0,2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel (Kapitel 12), aber auf dem Intervall $[0, 2]$ nicht Riemann-integrabel (Kapitel 8) ist und *berechne* $\int f \,\mathrm{d}\mu$ im Sinne der Lesbegueschen Theorie.

(2 Punkte + 2 Bonuspunkte + 1 Punkt)

(b) *Zeige*, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lesbegue-integrabel ist. *(2 Punkte)*

(c) *Berechne* $\int g \,\mathrm{d}\mu$ für die Funktion g aus (b). *(2 Bonuspunkte)*

[*Tipp:* Man benutze die Reihendarstellung von e.]

Lösung.

(a) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = 3 \cdot \chi_{[0,2]}(x)$. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar und daher eine Nullmenge ist, ist f fast überall gleich der Treppenfunktion $3 \cdot \chi_{[0,2]}$. Daher ist f Lesbegue-integrabel (wähle $f_n := 3 \cdot \chi_{[0,2]}$ und $g_n := 0$ für alle n in der Definition 12.13) mit

$$\int f d\mu = \int 3 \cdot \chi_{[0,2]} d\mu = 3 \cdot \mu([0, 2]) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Andererseits gilt für jede Partition p von $[0, 2]$, etwa p gegeben duch $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$, dass

$$\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \quad \text{und} \quad \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 3,$$

denn sowohl $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [x_{i-1}, x_i]$ als auch $\mathbb{Q} \cap [x_{i-1}, x_i]$ liegen dicht in $[x_{i-1}, x_i]$. Daher gilt für die Riemannsche Unter- bzw. Obersumme von f bzgl. p, dass $s(p, f) = 0$ bzw. $S(p, f) = 6$ (vgl. Abschnitt 8.1). Mit dem Kriterium von Darboux (Satz 8.7) folgt, dass f auf $[0, 2]$ nicht Riemann-integrierbar ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot \chi_{\left(\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}\right]}$. Dann ist g_n eine Treppenfunktion und es gilt jeweils $g_{n+1} - g_n = (n + 1)\chi_{\left(\frac{1}{(n+2)!}, \frac{1}{(n+1)!}\right]} \geq 0$, also $g_1 \leq g_2 \leq g_3 \leq \ldots$.
Außerdem ist die Folge $(\int g_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, denn

$$\begin{aligned} \int g_n d\mu &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Für $x \in \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right]$ gilt $g_{\widetilde{n}}(x) = g(x)$ für alle $\widetilde{n} \geq n$ und für $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right] = \mathbb{R} \setminus (0, 1]$ gilt $g_n(x) = 0 = g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass g_n fast überall (sogar überall) gegen g konvergiert, und deshalb ist g Lesbegue-integrabel.

zu (⋆): Alternativ zu dieser Abschätzung kann man auch die Konvergenz von $\sum \frac{k^2}{(k+1)!}$ in $\mathbb{R}$ mittels Quotientenkriterium nachweisen.

(c) Mit den Bezeichnungen aus (b) gilt

$$\begin{aligned}
\int g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\mu &\overset{\text{vgl.(b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \frac{k+1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= e - (e-1) + (e-1-1) = e - 1.
\end{aligned}$$