

9. Übung

28. Zum Satz über die implizite Funktion.

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Zeige, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = h(x)$ einen kritischen Punkt in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x_0, y_0) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

[Tipp: Warum muss $h(x)$ existieren? Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, h(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, h(x)) = c$.] (3 Punkte)

- (b) Zeige, dass in (x_0, y_0) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0. \tag{*}$$

(3 Punkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit “ < 0 ” anstelle von “ > 0 ” in (*).

29. Niveaumengen, Singularitäten und Extremwertsuche.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - x^3 - y^2.$$

- (a) Untersuche die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind, und bestimme andernfalls ihre Singularitäten. (2 Punkte)
- (b) Schreibe eine Formel $y = h(x)$ von der Kurve $x^2 - x^3 - y^2 = 0$ in der Nähe von $(-2, -\sqrt{12})$. (1 Punkt)
- (c) Bestimme mit Hilfe von 28 die lokalen Minima und Maxima Punkte der Kurve $g(x, y) = 1/27$ in Bezug auf y . (2 Bonuspunkte)

Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

- (d) Zeige, dass die Niveaumengen zu $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. (2 Punkte)
- (e) Bestimme die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) (2 Punkte)

Begründe, dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, (4 Punkte)

(g) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - xy + y^2 = 3$, (4 Punkte)

(h) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (4 Punkte)