Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

12. Mai 2021

9. Übung

28. Zum Satz über die implizite Funktion.

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) *Zeige*, dass die durch $f(x, y) = c$ lokal bestimmte implizite Funktion $y = h(x)$ einen kritischen Punkt in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ besitzt, wenn

$$f(x_0, y_0) = c, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

[*Tipp:* Warum muss $h(x)$ existiert? Man differenziere die Abbildung $x \mapsto f(x, h(x))$ mit Hilfe der Kettenregel und benutze, dass $f(x, h(x)) = c$.] *(3 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass in (x_0, y_0) ein lokales Maximum vorliegt, wenn

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} > 0. \tag{$\star$}$$

(3 Punkte)

Bemerkung: Analog zeigt man dieselbe Aussage auch für ein lokales Minimum mit "< 0" anstelle von "> 0" in ($\star$).

Lösung.

(a) Nach $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ sagt der Satz über die implizierte Funktion, dass es in der Nähe von x_0 eine Funktion h gibt, die $f(x, h(x)) = c$ und $y_0 = h(x_0)$ erfüllt. Durch Differenzieren dieser Gleichung ergibt sich

$$0 = \frac{d}{dx}\left(f(x, h(x))\right) = f'(x, h(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot h'(x)$$
$$\Rightarrow \quad h'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))}.$$

$h(x)$ hat einen kritischen Punkt an x_0, also $h'(x_0) = 0$ gilt, muss zudem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, h(x_0)) = 0$ gelten.

(b) Um zu bestimmen, ob es sich bei dem kritischen Punkt x_0 um ein Maximum oder Minimum handelt, muss man (vgl. Analysis 1) das Vorzeichen von $g''(x_0)$ bestimmen. Mit Hilfe der

Quotientenregel ergibt sich

$$
\begin{aligned}
h''(x) &= \frac{d}{dx} h'(x) \\
&= -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x))\right)' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x)) - \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x))}^{=0 \text{ an } x_0} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,h(x)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))\right)^2} \\
&= -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,h(x)), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,h(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))\right)^2} \\
&= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,h(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,h(x_0))}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x))\right)^2}, \quad \text{da } h'(x_0) = 0 \\
\Rightarrow h''(x_0) &= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,h(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,h(x_0))}.
\end{aligned}
$$

Somit impliziert $h''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,h(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,h(x_0))} < 0$, dass h ein lokales Maximum an dem kritischen Punkt x_0 hat. Dies bedeutet aber gerade, dass $\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,h(x_0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,h(x_0))} > 0$,

29. Niveaumengen, Singularitäten und Extremwertsuche.

Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 - x^3 - y^2 \ .$$

(a) *Untersuche* die Niveaumengen von g daraufhin, ob sie glatte Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind, und *bestimme* andernfalls ihre Singularitäten. *(2 Punkte)*

(b) *Schriebe* eine Formel $y = h(x)$ von der Kurve $x^2 - x^3 - y^2 = 0$ in der Nähe von $(-2, -\sqrt{12})$. *(1 Punkt)*

(c) *Bestimme* mit Hilfe von 28 die lokalen Minima und Maxima Punkte der Kurve $g(x,y) = 1/27$ in Bezug auf y. *(2 Bonuspunkte)*

Sei $U := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad g : U \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy \ .$$

(d) *Zeige*, dass die Niveaumengen zu $g(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ glatt sind. *(2 Punkte)*

(e) *Bestimme* die Gesamtheit aller kritischen Punkte von f auf den Niveaumengen $g(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. (Wenn man festzustellen versucht, welcher der kritischen Punkte auf einer vorgegebenen Niveaufläche liegt, kommt man auf eine kubische Gleichung, die nicht gelöst zu werden braucht.) *(2 Punkte)*

Begründe, dass die folgenden Funktionen Maximum und Minimum unter den gegebenen Nebenbedingungen annehmen und *bestimme* die Stellen, an denen die (globalen) Extrema angenommen werden.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x - 6y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$, *(4 Punkte)*

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ unter der Nebenbedinung $x^2 - xy + y^2 = 3$, *(4 Punkte)*

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) Die Funktion g ist als Polynom in x und y beliebig oft differenzierbar mit

$$\nabla g(x, y) = (2x - 3x^2, -2y).$$

Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist Singularität der zugehörigen Niveaumenge

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \nabla g(x, y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x - 3x^2 = 0 \text{ und } -2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(2 - 3x) = 0 \text{ und } y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0) \text{ oder } (x, y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right). \end{aligned}$$

Es gilt $g(0, 0) = 0$ und $g\,(2/3, 0) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} - 0 = \frac{4}{27}$. Also ist die Niveaufläche

$$M_c := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = c\right\}$$

glatt für $c \notin \{0, \frac{4}{27}\}$. M_0 hat eine Singularität in $(0, 0)$ und $M_{4/27}$ hat zwei Singularitäten: eine in $(2/3, 0)$.

https://www.desmos.com/calculator/mre1rezaro

(b) $y = h(x) = -\sqrt{x^2 - x^3}$. Bemerke, dass $h(-2) = -\sqrt{12}$ und

$$f(x, h(x)) = x^2 - x^3 - (-\sqrt{x^2 - x^3})^2 = x^2 - x^3 - (x^2 - x^3) = 0.$$

(c) Betrachten wir die Kurve in der Form $y = h(x)$. Dann an kritischen Punkten

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2/3.$$

Wenn $x = 0$, muss $0 - y^2 = 1/27$ und das kann nicht sein. Wenn $x = 2/3$, muss $4/27 - y^2 = 1/27$ und so $y = \pm 1/3$. Wir sehen

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{2 - 6x}{-2y}.$$

Also ist $(2/3, 1/3)$ ein lokales Maximum und $(2/3, -1/3)$ ein lokales Minimum in Bezug auf y.

(d) Die Funktion g ist offenbar beliebig oft differenzierbar mit

$$\nabla g(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

https://www.desmos.com/calculator/lcaiguk6yz Der Punkt $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ ist Singularität, wenn

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y) = 0 \;&\Leftrightarrow\; (3x^2 - 3y = 0 \;\text{ und }\; 3y^2 - 3x = 0) \;\Leftrightarrow\; (x^2 = y \;\text{ und }\; y^2 = x)\\ &\Leftrightarrow\; (\underbrace{y = y^4}_{\Leftrightarrow y \in \{0,1\}} \;\text{ und }\; x = y^2) \;\Leftrightarrow\; (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\}.\end{aligned}$$

Daher liegen die Singularitäten der Niveaufläche an den Stellen $(0,0)$ und $(1,1)$ vor. Es gilt $g(0,0) = 0$ und $g(1,1) = -1$. Daher ist die Niveaufläche

$$M_c := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; g(x,y) = c\right\}$$

für $c \notin \{-1, 0\}$ glatt.

(e) Bedingung für kritischen Punkt auf der Niveaumenge M_c für $c \notin \{-1,0\}$ (Satz 11.17)

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \;\text{ mit }\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\nabla f = (1,1)$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\text{(I)}\quad 1 &= \lambda \cdot (3x^2 - 3y)\\ \text{(II)}\quad 1 &= \lambda \cdot (3y^2 - 3x)\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Aus (I) erhält man $\lambda \neq 0$ und Subtraktion (I)-(II) ergibt

$$\lambda \cdot (3x^2 - 3y - 3y^2 + 3x) = 0 \overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} x^2 - y - y^2 + x = 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}x^2 - y - y^2 + x = 0 \;&\Leftrightarrow\; y^2 + y = x^2 + x \;\Leftrightarrow\; y^2 + y + \frac{1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow\; \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; y + \frac{1}{2} = \pm\left(x + \frac{1}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow\; y = x \;\text{ oder }\; y = -x - 1.\end{aligned}$$

Also hat das Gleichungssystem $(\star)$ die Lösungen (x,x) und $(x,-x-1)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Es gilt stets

$$\begin{aligned}g(x,-x-1) &= x^3 + (-x-1)^3 - 3x(-x-1) = x^3 - (x+1)^3 + 3x(x+1)\\ &= x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 3x = -1,\end{aligned}$$

also $(x,-x-1) \in M_{-1}$. Da nach der Niveaufläche zu $c = -1$ nicht gefragt ist, müssen wir nur noch die Lösung (x,x) betrachten. Es gilt $g(x,x) = 2x^3 - 3x^2$ und daher

$$g(x,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x = 0 \text{ oder } x = \frac{3}{2}\right) \;\text{ und }\; g(x,x) = -1 \;\Leftrightarrow\; \left(x = 1 \text{ oder } x = -\frac{1}{2}\right).$$

Da $x > 0$, braucht man den Punkt $x = -\frac{1}{2}$ nicht weiter zu beachten. Wir sehen daher: Für $x \notin \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$ ist (x,x) ein kritischer Punkt von $f|_{M_c}$ mit $c = 2x^3 - 3x^2 \notin \{0,-1\}$ und alle kritischen Punkte von $f|_{M_c}$ $(c \notin \{-1,0\})$ sind von dieser Art.

(f) Definiere

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 4\}$$

mit $g(x,y) = x^2 + y^2$.

M ist kompakt. Denn einpunktige Mengen sind abgeschlossen und g stetig, also ist die Urbildmenge $g^{-1}[\{4\}]$ ebenfalls abgeschlossen. Sie ist auch beschränkt, da aus $x^2 + y^2 \leq 4$ folgt, dass $x, y \in [-2, 2]$. Da f stetig und M kompakt ist, nimmt f sein Maximum und Minimum auf M an.

Um Extrema von f auf M zu bestimmen, müssen zwei verschiedene Arten möglicher Kandidaten für diese untersuchen:

Singularitäten der Niveaumenge M: $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \;\Leftrightarrow x = y = 0$, also $(x,y) = (0,0)$. Jedoch ist $(0,0) \notin M$ und somit ist M glatt.

Kritische Punkte von f auf M: Der Lagrange-Ansatz lautet

$$\nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

Daraus ergibt sich, zusammen mit der Zwangsbedingung, das Gleichunssystem

$$\begin{array}{llcccc}
\text{(I)} & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & & 1 = \lambda 2x & \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{1}{2x} \\
\text{(II)} & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) & \Leftrightarrow & -6 = \lambda 2y & \Leftrightarrow & \lambda = -\dfrac{3}{y} \\
\text{(III)} & g(x,y) = 4 & & 4 = x^2 + y^2 & &
\end{array}$$

Dabei sind die Divisionen durch x bzw. y in (I) bzw. (II) erlaubt, da aus diesen beiden Gleichungen $x, y \neq 0$ folgt (es wäre auch möglich durch λ zu teilen, jedoch muss dann argumentiert werden, warum $\lambda \neq 0$). Durch Gleichsetzen von (I) und (II) erhält man

$$\frac{1}{2x} = -\frac{3}{y} \;\Leftrightarrow\; y = -6x.$$

Einsetzen in (III) ergibt dann

$$37x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{2}{\sqrt{37}} \;\Rightarrow\; y = \mp\frac{12}{\sqrt{37}}.$$

Also ergeben sich als kritische Punkte von $f|_M$

$$P_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{37}}, -\frac{12}{\sqrt{37}}\right) \quad \text{und} \quad P_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{37}}, \frac{12}{\sqrt{37}}\right).$$

Da M glatt ist sind die einzigen Kandidaten für lokale Minima und Maxima von f unter der gegebenen Nebenbedingung die Punkte P_1 und P_2. Auswerten von f an diesen Punkten ergibt

$$f(P_1) = \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{72}{\sqrt{37}} > 0, \qquad f(P_2) = -\frac{2}{\sqrt{37}} - \frac{72}{\sqrt{37}} < 0.$$

$\Rightarrow$ Unter den gegebenen Nebenbedingungen hat f ein lokales Maximum an P_1 und ein lokales Minimum an P_2.

(g) Sei

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 3\}.$$

mit $g(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

M ist als Urbildmenge einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen. Außerdem ist M auch beschränkt, denn aus $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ erhält man

$$y_{1/2} = \frac{x}{2} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{3}{4}x^2 + 3}}_{\geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2} \quad \text{und} \quad x_{1/2} = \frac{y}{2} \pm \underbrace{\sqrt{-\frac{3}{4}y^2 + 3}}_{\geq 0 \Leftrightarrow |y| \leq 2}.$$

Da M beschränkt und abgeschloßen, also kompakt ist und f stetig ist, nimmt f sein Maximum und Minimum auf M an.

Um ein Extremum von f auf M zu bestimmen, müssen wir wieder zwei verschiedene Arten von möglichen Kandidaten betrachten:

Singularitäten der Niveaumenge M: $\nabla g(x,y) = (2x - y, 2y - x) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$, also $(x,y) = (0,0)$. Jedoch ist $(0,0) \notin M$ und somit hat M keine Singularitäten.

Kritische Punkte von f auf M: Hierfür benutzen wir wieder den Lagrange-Formalismus, d.h. wir betrachten

$$\nabla f(x,y) + \lambda \cdot \nabla g(x,y) = 0 \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies ergibt, zusammen mit der Nebenbedingung, das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cr} \text{(I)} & 2x + \lambda(2x - y) = 0 \\ \text{(II)} & 2y + \lambda(2y - x) = 0 \\ \text{(III)} & x^2 - xy + y^2 = 3 \end{array}$$

(I)-(II): $2(x-y) + 3\lambda(x-y) = 0$

1. Fall: $x = y$, dann ergibt (III), dass $x = y = \pm\sqrt{3}$

2. Fall: $x \neq y$, dann ist $2 + 3\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2}{3} \neq 0$.

λ in (I):

$$2x - \frac{2}{3}(2x - y) \;\Leftrightarrow\; 6x - 4x + 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -y,$$

in (III): $x = \pm 1$, $y = \mp 1$. Also gibt es insgesamt vier kritische Punkte:

$$\begin{aligned} P_{1/2} &= \left(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}\right), & f(P_{1/2}) &= 6, \\ P_{3/4} &= (\pm 1, \mp 1), & f(P_{3/4}) &= 2. \end{aligned}$$

Um herauszufinden, welcher der Punkte $P_1, \ldots, P_4$ lokales Maximum bzw. lokales Minimum ist, haben wir f an diesen Punkten ausgewertet. Also sind an $P_{1/2}$ lokale Maxima von $f|_M$ und an $P_{3/4}$ lokale Minima von $f|_M$.

(h) Betrachte

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0 \wedge h(x,y,z) = 1\right\}$$

mit $g(x,y,z) := x + y + z$ und $h(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$.

Die Menge M ist als endlicher Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen:

$$M = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}}_{=:M_1} \cap \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}}_{=:M_2}.$$

($M_1 = g^{-1}[\{0\}]$ und $M_2 = h^{-1}[\{1\}]$ sind als Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen abgeschlossen.)
Die Menge M ist zudem beschränkt, da bereits die Menge

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_2 = 1\}$$

beschränkt ist. Durch den Schnitt von der Sphäre M_1 mit der Ebene M_2 bleibt die Beschränktheit erhalten. Also ist M kompakt. Da die Funktion f zudem stetig ist, nimmt sie ihr Maximum und Minimum auf der kompakten Menge M an.

Singularitäten der Niveaumenge M:

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1) \quad \text{und} \quad \nabla h(x,y,z) = (2x,2y,2z).$$

Die Singularitäten von M sind nach dem Rangsatz (Satz 11.20) diejenigen Stellen, an denen $\nabla g(x,y,z)$ und $\nabla h(x,y,z)$ linear abhängig sind. D.h. dass es an denen λ, $\mu \in \mathbb{R}$, nicht beide Null, gibt mit

$$\lambda \cdot (1,1,1) + \mu \cdot (2x,2y,2z) = 0.$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & \lambda + 2\mu x &= 0, \\ &\text{(II)} & \lambda + 2\mu y &= 0, \\ &\text{(III)} & \lambda + 2\mu z &= 0. \end{aligned}$$

Aus (I) erhalten wir $\lambda = -2\mu x$. Setzt man dies in (II) ein, so erhält man $2\mu(y-x) = 0$, also $\mu = 0$ oder $x = y$. Da aus $\mu = 0$ jedoch $\lambda = 0$ folgt, betrachten wir $x = y$. Analog erhält man aus (III) auch $x = z$. Also betrachten wir $(x,y,z) \in \mathbb{R} \cdot (1,1,1)$. Setzt man dies in die Zwangsbedingung $g(x,y,z) = 0$ ein, so ergibt sich $3x = 0$, also $x = 0$. Dann ergibt sich jedoch mit der zweiten Zwangsbedingung $h(x,y,z) = 1$, dass $0 = 1$.
$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \notin M$. Also keine Kandidaten für Extrema, da die Zwangsbedingungsmenge M glatt ist.

Kritische Punkte von f auf M: Der Lagrange-Ansatz lautet

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h,$$

also

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 5 &= \lambda + 2\mu x, \\ &\text{(II)} & 1 &= \lambda + 2\mu y, \\ &\text{(III)} & -3 &= \lambda + 2\mu z, \\ &\text{(IV)} & 0 &= x + y + z, \\ &\text{(V)} & 1 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Die Summe (I)+(II)+(III) ergibt $3 = 3\lambda + 2\mu(x+y+z)$. Mit Hilfe von (IV) ergibt sich: $3 = 3\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$. Dann ist

$$\mu \cdot x = 2, \quad \mu \cdot y = 0, \quad \mu \cdot z = -2,$$

also insbesondere $\mu \neq 0$. Da $\mu \neq 0$ erhalten wir $y = 0$ und somit mit (IV) $x = -y - z = -z$ sowie mit (V) $x^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$. Also sind die kritischen Punkte

$$P_1 = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), \quad P_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

mit $f(P_1) = 8/\sqrt{2}$ und $f(P_2) = -8/\sqrt{2}$. Also wird das Minimum von f an P_2 und das Maximum an P_1 angenommen.