Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

5. Mai 2021

8. Übung

24. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2×2)-Matrizen.

Es sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Seien die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren v_1, v_2. Das heißt, $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2$. Für symmetrische Matrizen sind die Eigenvektoren ein Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 \cdot v_2 = 0$. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Spur}(A) := a + c = \lambda_1 + \lambda_2 \,.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat.

(a) Zeige, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) > 0$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Warum folgt es einfach, dass A genau dann negativ definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\operatorname{Spur}(A) < 0$ ist. *(1 Punkt)*

(c) Zeige: A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x, x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x}, \widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(3 Punkte)*

Bemerkung: Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 23 erfüllt.

25. Fixiere die Nullstelle.

(a) Sei $F : [1.1, 10] \to [1.1, 10]$ mit $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Zeige, dass F ein Lipschitzkonstant $L = \frac{100}{121}$ hat. Approximiere daher eine Lösung von $x^2 = x + 1$. *(3 Punkte)*

(b) Kann man mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass die Volterrasgleichung (Übung 17) eine Lösung hat? *(2 Punkte)*

26. Picard-Iteration.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad u(0) = 1 \,. \tag{$\star$}$$

(a) Verwende das Iterationsverfahren von Picard

$$u_0(t) = 1 \,, \qquad u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t u_n(s)\, ds,$$

um die ersten drei Glieder $u_1, \ldots, u_5$ einer Folge zu *bestimmen*, welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung u von $(\star)$ konvergiert. *(5 Punkte)*

[*Dazu:* Die Konvergenz der Picard-Iteration f'ur kleine t wurde im Beweis von Satz 11.3 gezeigt.]

(b) Wie lautet die Lösung von $(\star)$? *(2 Punkte)*

27. Zum Satz 11.9 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(2 Bonuspunkte)*

(b) *Zeige,* dass f auf einer Umgebung U von $x = 1$ injektiv ist. Was ist $(f|_U^{-1})'$ in diesem Punkt? *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Angenommen, $f_{|(-\varepsilon,\varepsilon)}$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nach Satz 6.4 streng monoton und deshalb würde $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet erhält man einen Widerspruch.]