Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

5. Mai 2021

8. Übung

24. Ein Kriterium für die Definitheit symmetrischer (2×2)-Matrizen.

Es sei $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ eine symmetrische (2×2)-Matrix. Seien die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren v_1, v_2. Das heißt, $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2$. Für symmetrische Matrizen sind die Eigenvektoren ein Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 \cdot v_2 = 0$. Bekanntlich ist dann die Determinante bzw. die Spur von A

$$\det(A) := ac - b^2 = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Spur}(A) := a + c = \lambda_1 + \lambda_2 \,.$$

Wir nennen A positiv bzw. negativ definit, wenn die durch A beschriebene symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) := x \cdot Ay$ diese Eigenschaft hat.

(a) Zeige, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Warum folgt es einfach, dass A genau dann negativ definit ist, wenn $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) < 0$ ist. *(1 Punkt)*

(c) Zeige: A ist genau dann indefinit (d.h. es gibt $x, \widetilde{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x, x) > 0$ und $\beta(\widetilde{x}, \widetilde{x}) < 0$), wenn $\det(A) < 0$ ist. *(3 Punkte)*

Bemerkung: Diese Kriterien sind vor allem hilfreich, um zu untersuchen, ob die Hessematrix einer Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einem kritischen Punkt die Voraussetzung von Aufgabe 23 erfüllt.

Lösung.

(a) "$\Rightarrow$": Setze voraus, dass A positiv definit ist. Da $0 < v_j^T A v_j = v_j^T \lambda_j v_j = \lambda_j \|v_j\|$, folgt es, dass $\lambda_j > 0$. Also sind $\det(A)$ und $\mathrm{Spur}(A)$ auch großer als Null.
"$\Leftarrow$": Wenn $\det(A)$ und $\mathrm{Spur}(A)$ großer als Null sind, müssen die Eigenwerte großer als Null sein. Weil die Eigenvektoren ein basis sind, kann jedes Vektor $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ geschrieben werden. Dann

$$\begin{aligned} v^T A v &= v^T A(\alpha v_1 + \beta v_2) = v^T(\alpha A v_1 + \beta A v_2) = v^T(\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2) \\ &= (\alpha v_1 + \beta v_2) \cdot (\alpha \lambda_1 v_1 + \beta \lambda_2 v_2) = \alpha^2 \lambda_1 \|v_1\|^2 + \beta^2 \lambda_2 \|v_2\|^2 > 0. \end{aligned}$$

(b) Sei $B = -A$, so dass $\det(B) = \det(A)$ und $\mathrm{Spur}(B) = -\mathrm{Spur}(A)$. Dann B ist negativ definit $\Leftrightarrow$ A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $\det(A) > 0$ und $\mathrm{Spur}(A) > 0$ $\Leftrightarrow$ $\det(B) > 0$ und $\mathrm{Spur}(B) < 0$.

(c) Wenn $\det(A) < 0$, muss $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ (o.B.d.A.). Also $v_1^T A v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2 > 0$ und $v_2^T A v_2 = \lambda_2 \|v_2\|^2 < 0$.
Wir haben gesehen, dass $v^T A v = \alpha^2 \lambda_1 \|v_1\|^2 + \beta^2 \lambda_2 \|v_2\|^2$ für $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ ist. Wenn $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$ wären, würde es folgen, dass $v^T A v \geq 0$ (bzw. $v^T A v \leq 0$) für alle $v \neq 0$. Aber A ist indefinit und so das kann nicht sein. Daher ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ (o.B.d.A.) und $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

25. Fixiere die Nullstelle.

(a) Sei $F : [1.1, 10] \to [1.1, 10]$ mit $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Zeige, dass F ein Lipschitzkonstant $L = \frac{100}{121}$ hat. Approximiere daher eine Lösung von $x^2 = x + 1$. *(3 Punkte)*

(b) Kann man mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen, dass die Volterrasgleichung (Übung 17) eine Lösung hat? *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Die Funktionen ist wohl-definiert: für $x \leq 10$ ist $F(x) = 1 + \frac{1}{x} \geq 1 + 0.1$ und für $x \geq 1.1$ ist $F(x) \geq 1 + 0.9$. Berechnen wir

$$|F(x) - F(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{1}{xy}|x-y|$$

und $\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{1.21} = \frac{100}{121}$. Das ist das beste konstant, weil

$$|F(1.1) - F(1.1+\epsilon)| = \frac{1}{1.21 + 1.1\epsilon}\epsilon.$$

Deshalb sagt der Banachsche Fixpunktsatz 11.1, dass F einen eindeutigen Fixpunkt a hat. a ist die Lösung von $a = 1 + \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 = a + 1$. Wir können es approximieren:

$$a_0 = 1.1, \qquad a_1 = F(1.1) = 1.909, \qquad a_2 = F(F(1.1)) = 1.524,$$
$$a_{10} = F^{10}(1.1) = 1.618, \qquad a_{25} = F^{25}(1.1) = 1.618033989$$

Nach Algebra ist $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(b) Ja. Die Gleichung ist $f = 1 + \lambda I(f)$, also ist f der Fixpunkt von $F(f) = 1 + \lambda I(f)$ mit $F : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$. Das Lipschitzkonstant können wir berechnen:

$$\|F(f)-F(g)\|_\infty = \|1+\lambda I(f)-1-\lambda I(g)\|_\infty = \|\lambda I(f)-\lambda I(g)\|_\infty = \lambda\|I(f)-I(g)\|_\infty \leq \lambda\|f-g\|_\infty,$$

weil I Lipschitz mit konstant 1 ist. Daher ist F Lipschitz mit konstant λ. Wegen der Voraussetzung $0 < \lambda < 1$, folgt es.

26. Picard-Iteration.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t), \quad u(0) = 1 \ . \qquad (\star)$$

(a) Verwende das Iterationsverfahren von Picard

$$u_0(t) = 1\ , \qquad u_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t u_n(s)\,ds,$$

um die ersten drei Glieder $u_1, \ldots, u_5$ einer Folge zu *bestimmen*, welche nach dem Banachschen Fixpunktsatz gegen die Lösung u von $(\star)$ konvergiert. *(5 Punkte)*

[*Dazu:* Die Konvergenz der Picard-Iteration für kleine t wurde im Beweis von Satz 11.3 gezeigt.]

(b) Wie lautet die Lösung von $(\star)$? *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Im Beweis von Satz 11.3 wurde mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes 11.1 gezeigt, dass die gegebene induktiv definierte Folge gegen $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ konvergiert. Es ist $u_0(t) = 1$

$$u_1(t) = 1 + \int_0^t u_0(s)\,ds = 1 + \int_0^t 1\ ds = 1 + [s]_{s=0}^t = 1 + t$$

$$u_2(t) = 1 + \int_0^t u_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + \left[s + \frac{1}{2}s^2\right]_{s=0}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$\begin{aligned} u_3(t) = 1 + \int_0^t u_2(s)\,ds &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{1}{2}s^2\right)\ ds \\ &= 1 + \left[s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right]_{s=0}^t \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4(t) = 1 + \int_0^t u_3(s)\,ds &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3\right)\ ds \\ &= 1 + \left[s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4\right]_{s=0}^t \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_5(t) = 1 + \int_0^t u_4(s)\,ds &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4\right)\ ds \\ &= 1 + \left[s + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s^4 + \frac{1}{120}s^5\right]_{s=0}^t \\ &= 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 \end{aligned}$$

(b) $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k = \exp(t)$.

27. Zum Satz 11.9 über die inverse Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) *Zeige,* dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$, aber in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar ist. *(2 Bonuspunkte)*

(b) *Zeige,* dass f auf einer Umgebung U von $x = 1$ injektiv ist. Was ist $(f|_U^{-1})'$ in diesem Punkt? *(3 Punkte)*

(c) *Zeige,* dass f auf keiner Umgebung von $x = 0$ injektiv ist. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Angenommen, $f_{|(-\varepsilon,\varepsilon)}$ wäre injektiv für ein $\varepsilon > 0$. Dann wäre $f|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nach Satz 6.4 streng monoton und deshalb würde $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$ gelten. Indem man nun für eine geschickt gewählte Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Werte $f'(a_n)$ und $f''(a_n)$ ausrechnet erhält man einen Widerspruch.]

Lösung.

(a) Offenbar ist f in $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (sogar stetig) differenzierbar mit

$$f'(x) = 1 + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für die Funktion

$$g(x) := f(x) - x = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

gilt wegen $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dass $|g(x)| \leq |x|^2$. In Aufgabe 41(b) wurde gezeigt, dass eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 = 0$ differenzierbar ist und dass $g(0) = g'(0) = 0$ gilt, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $|g(x)| \leq C|x|^{1+\alpha}$ mit $C, \alpha > 0$. Somit ist g in $x = 0$ differenzierbar mit $g'(0) = 0$. Somit ist auch $f(x) = g(x) + x$ in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = g'(0) + 1 = 1$.

Andererseits gilt mit $a_n := \frac{1}{2\pi n}$, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und

$$f'(a_n) = 1 + 2a_n \underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1} = 0$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} f'(a_n) = 0 \neq 1 = f'(0).$$

Also ist f' in $x = 0$ nicht stetig und somit f in $x = 0$ nicht stetig differenzierbar.

(b) $f'(1) = 1 + 2\sin(1) - \cos(1) \neq 0$. Also ist $f'(1)$ invertierbar. Und wir haben in (a) schon gesehen, dass f in $x = 1$ stetig differenzierbar ist. Deshalb sagt der Satz über die inverse Funktion, dass es eine Umgebung U von $x = 1$ gibt, so dass $f_U : U \to f[U]$ bijektiv ist. $(f|_U^{-1})' = (f'(1))^{-1}$.

(c) Angenommen es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so dass $f|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ injektiv ist. Da f außerdem stetig ist, ist dann $f|_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ streng monoton (wachsend oder fallend) und daher gilt $f'|_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \geq 0$ bzw. $f'|_{[-\varepsilon,\varepsilon]} \leq 0$ nach Satz 7.15.
Wir wählen nun die Folge (a_n) wie in (a). Dann exisitert wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Für dieses gilt nach (a), dass $f'(a_N) = 0$ und außerdem

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow \quad f''(a_N) &= \left(2 - \frac{1}{a_N^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{a_N}\right) - \frac{2}{a_N} \cdot \cos\left(\frac{1}{a_N}\right) = -\frac{2}{a_N} < 0 \end{aligned}$$

Wegen $f'(a_N) = 0$ und $f''(a_N) < 0$ wechselt f' in $a_N \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ das Vorzeichen, gegen $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \geq 0$ bzw. $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \leq 0$. Daher ist $f'|_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ nicht injektiv.