Martin Schmidt
Ross Ogilvie

**Analysis II**

28. April 2021

## 7. Übung

### 20. Interpretation von $\nabla f$

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann ist die Zeilenvektor $\nabla f(x)$ eine Darstellungmatrix von $f'(x)$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. *Zeige*, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt:

$$-\|\nabla f(x)\| \ \leq \ \nabla f(x) \cdot v \ \leq \ \|\nabla f(x)\| \, . \tag{$\star$}$$

*Zeige* zudem, dass für $\nabla f(x) \neq 0$ in $(\star)$ in der linken bzw. rechten Ungleichung Gleichheit gilt, wenn $v = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ bzw. $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist. *(2 Punkte)*

[*Hinweis:* Cauchy-Schwarzsche Ungleichung]

*Interpretation:* $\nabla f(x)$ gibt die Richtung und den Betrag des größten Anstiegs von $f$.

### 21. Weitere Untersuchung.

Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 18 (b):

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Die kritischen Punkte von $f$ sind $(0,0), (-5/3, 0), (-1, 2), (-1, -2)$. Hier ist es als eine Graph: https://www.math3d.org/QaCIDWpL. Schreiben wir in dieser Aufgabe $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Das Taylorpolynom ist im Satz 10.29 definiert. Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 0 ist einfach das Wert $f(\mathbf{x}_0)$. Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 1 ist

$$\begin{aligned} T_{1,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

**(a)** Zeige, dass der Taylorpolynom von unserem $f$ in $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$ der Ordnung 1 ist $T_{1,(0,1)}(x, y) = -1 + x + 2y$. *(2 Punkte)*

**(b)** Berechne $T_{1,(-5/3,0)}(x, y)$. *(1 Punkt)*

**(c)** Was ist die geometrische Interpretation von $T_{1,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$? Man könnte math3d.org und (a) und (b) zum Hilfe benutzen. *(1 Punkt)*

Das Taylorpolynom in $\mathbf{x}_0$ der Ordnung 2 ist

$$\begin{aligned} T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + + \frac{1}{2!} f^{(2)}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Nach Definition 10.26 ist die Darstellungmatrix von $f''(x)$ auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ die Hessematrix:

$$\mathrm{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) := \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Also gilt mit Matrizen

$$T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \mathrm{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

**(d)** Zeige, dass in $\mathbf{x}_0 = (a, b)$ ist $\mathrm{Hess}(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 12a + 10 & 2b \\ 2b & 2a + 2 \end{pmatrix}$ *(4 Punkte)*

**(e)** Berechne daher $T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = (0, 1)$, $\mathbf{x}_0 = (-5/3, 0)$ und $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. *(3 Punkte)*

**(f)** Was kann man über $T_{2,\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ sagen, wenn $\mathbf{x}_0$ ein kritischer Punkt ist? *(1 Punkt)*

## 22. Zu Satz 10.27: Hinreichendes Kriterium für lokale Extremwerte.

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform nach Definition 10.20 und Satz 10.22. Wir wollen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\beta(x, x) \geq \delta \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $\beta$ *positiv definit* ist. Positiv definit heißt $\beta(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

**(a)** Warum muss $\beta$ stetig sein? *(1 Bonuspunkt)*

**(b)** Setze voraus, dass $\beta$ positiv definit ist. Betrachten $W = \{\beta(v, v) \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = 1\}$. Warum hat diese Menge ein Minimum $\delta$ mit $\delta > 0$? *(2 Punkte)*

**(c)** Zeige dann, dass $\beta(x, x) \geq \delta \|x\|^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. *(2 Punkte)*

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von $f$. Wir wissen, dass $f''(x_0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.

**(d)** *Beweise* man: Wenn $f''(x_0)(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, so besitzt $f$ in $x_0$ ein striktes lokales Minimum. *(2 Punkte)*

*Bemerkung 1.* Wenn $f''(x_0)(x, x) < 0$ für einen kritischen Punkt $x_0$, betrachte $g(x) = -f(x)$. Dann ist $g' = -f'$ und $g'' = -f''$. Es folgt dann, dass $x_0$ auch ein kritischer Punkte von $g$ ist und ein lokales Minimum von $g$. Deshalb ist es ein striktes lokales Maximum von $f$.

*Bemerkung 2.* Diese Verschärfung von Satz 10.27 gilt nicht, wenn $f$ auf einem unendlich-dimensionalen normierten Vektorraum definiert ist, siehe Beispiel 10.28.

## 23. Extremwertsuche.

*Bestimme* alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Aufgabe 18 (b) und 21, und *entscheide* jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt. *(5 Punkte)*