Martin Schmidt
Ross Ogilvie

# Analysis II

21. April 2021

## 6. Übung

### 18. Kritische Punkte, Gradient, Rotation und Divergenz.

**(a)** *Berechne* die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \sin z$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$. *(3 Punkte)*

**(b)** *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

**(i)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(3 Punkte)*

**(ii)** $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y\ \sin(x)$ *(3 Punkte)*

**(iii)** $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(3 Punkte)*

**(c)** *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x^2y, y^2z, xz)\ .$$ *(2+2 Punkte)*

### 19. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Wir nennen $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der $k$-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

**(a)** Zeige, dass $\frac{\partial x}{\partial x_k} = e_k$. *(1 Punkt)*

**(b)** Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung von $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, der durch $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ definiert,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g$$

ist. *(2 Punkte)*

**(c)** Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben. *Zeige*, dass $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum $f$ an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(2 Punkte + 2 Bonuspunkte)*

**(d)** Sei nun die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

gegeben. *Zeige*, dass für die $k$-te partielle Ableitung von $h$ an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x.$$

*(2 Punkte)*

**(e)** *Folgere* aus (ii), dass $h$ differenzierbar ist und dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\ .$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf den Richtungsvektor $v$. *(3 Bonuspunkte)*