Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

21. April 2021

6. Übung

18. Kritische Punkte, Gradient, Rotation und Divergenz.

(a) *Berechne* die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^3 + e^y \sin z$$

an der Stelle $x_0 = (1, \log 3, \frac{\pi}{3})$ in Richtung $v = (3, -2, 6)$. *(3 Punkte)*

(b) *Berechne* den Gradienten und *bestimme* alle kritischen Punkte der folgenden Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ *(3 Punkte)*

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y\ \sin(x)$ *(3 Punkte)*

(iii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^4 + 2y^2 + 2z^2 + 4xz$ *(3 Punkte)*

(c) *Berechne* die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x^2y, y^2z, xz)\ . \qquad \text{(2+2 Punkte)}$$

Lösung.

(a) Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv_0) &= f\Big(1 + 3t, \log(3) - 2t, \frac{\pi}{3} + 6t\Big) = (1 + 3t)^3 + e^{\log(3)-2t} \sin\Big(\frac{\pi}{3} + 6t\Big) \\ &= (3t + 1)^3 + 3e^{-2t} \sin\Big(\frac{\pi}{3} + 6t\Big) =: g(t) \end{aligned}$$

und daher ist die gesuchte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} g'(0) &= \Big(3(3t + 1)^2 \cdot 3 + 3(-2)e^{-2t} \sin\Big(\frac{\pi}{3} + 6t\Big) + 3e^{-2t} \cos\Big(\frac{\pi}{3} + 6t\Big)6\Big)\Big|_{t=0} \\ &= 3 \cdot (0 + 1)^2 \cdot 3 - 6e^0 \underbrace{\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big)}_{=\sqrt{3}/2} + 18e^0 \underbrace{\cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big)}_{=1/2} = 9 - 3\sqrt{3} + 9 = 18 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

[Natürlich kann man auch $f'(x_0)v$ mittels Jacobi-Matrix ausrechnen.]

(b) (i) $\nabla f(x, y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y)$
(x, y) kritischer Punkt von $f \Leftrightarrow$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \text{ und } 2xy + 2y = 0.$$

$2y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ oder $y = 0$.
Aus $y = 0$ folgt $6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow 6x\big(x + \frac{5}{3}\big) = 0$, also $x = 0$ oder $x = -\frac{5}{3}$.
Aus $x = -1$ folgt $y^2 = 4$, also $y = \pm 2$.
Also ist die Menge der kritischen Punkte von f gleich $\{(0, 0), (-\frac{5}{3}, 0), (-1, 2), (-1, -2)\}$.

(ii) $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (y \cdot \cos(x), \sin(x))$.
(x,y) kritischer Punkt von g $\Leftrightarrow$

$$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y \cdot \cos(x) = 0 \text{ und } \sin(x) = 0.$$

$y \cdot \cos(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ oder $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
(für diese x ist jedoch $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) \neq 0$).
$\sin(x) = 0$ für $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
Also ist die Menge der kritischen Punkte von g gleich $\{(k\pi, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) $\nabla h(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right) = (4x^3 + 4z, 4y, 4z + 4x)$.
(x,y,z) kritische Punkte von h $\Leftrightarrow$

$$\nabla h(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow \underbrace{x^3 + z = 0}_{(1)},\ \underbrace{y = 0}_{(2)},\ \underbrace{z = -x}_{(3)}.$$

Aus (2) erhält man $y = 0$. Indem man (3) in (1) einsetzt, erhält man $x(x^2 - 1) = 0$.
Hieraus folgt $x = 0$ oder $x = \pm 1$.
Aus (3) ergibt sich, dass $z = 0$ für $x = 0$, $z = -1$ für $x = 1$ und $z = 1$ für $x = -1$.
Also ist die Menge der kritischen Punkte von h gleich $\{(0,0,0), (1,0,-1), (-1,0,1)\}$.

(c) $\operatorname{rot}(f) = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = (0 - y^2, 0 - z, 0 - x^2) = (-y^2, -z, -x^2)$,
$\operatorname{div}(f) = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2xy + 2yz + x$.

19. Mehr Rechenregeln für die Ableitung.

Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt $x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k\, y_k$ und der hiervon induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Wir nennen $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der k-te Standardeinheitsvektor des $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeige, dass $\frac{\partial x}{\partial x_k} = e_k$. *(1 Punkt)*

(b) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Zeige, dass die Ableitung von $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, der durch $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ definiert,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g$$

ist. *(2 Punkte)*

(c) Sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

gegeben. *Zeige*, dass $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und *begründe*, warum f an $x = 0$ in keine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. *(2 Punkte + 2 Bonuspunkte)*

(d) Sei nun die Abbildung
$$h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$
gegeben. *Zeige*, dass für die k-te partielle Ableitung von h an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, dass
$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{\|x\|}\, e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}\, x.$$
(2 Punkte)

(e) *Folgere* aus (ii), dass h differenzierbar ist und dass für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$h'(x)v = \frac{1}{\|x\|}\, v - \frac{x \cdot v}{\|x\|^3}\, x\,.$$
Dabei bedeutet der Ausdruck $h'(x)v$ die Anwendung der linearen Abbildung $h'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf den Richtungsvektor v. *(3 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Die Funktion $f(x) = x$ ist in Komponenten $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Also
$$\frac{\partial x}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_k}, \frac{\partial x_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial x_k}\right) = (0, 0, \dots, 1, \dots 0) = e_k.$$

(b) Seien $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ und $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$. Also ist $f \cdot g(x) = f_1(x)g_1(x) + \dots + f_n(x)g_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)g_j(x)$. Nach Linearität und der normale Leibnizregel folgt
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}[f_j g_j] = \sum_{j=1}^n \left[f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_j}{\partial x_k} g_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k} g_j + \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}\end{aligned}$$

(c) Für $x \neq 0$ ist für $i \in \{1, \dots, n\}$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\| = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{\|x\|}$$
und somit für $x \neq 0$
$$\nabla\|x\| = \left(\tfrac{x_1}{\|x\|}, \dots, \tfrac{x_n}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}\left(x_1, \dots, x_n\right) = \frac{x}{\|x\|}.$$
ODER: Schreibe $f(x) = (x \cdot x)^{1/2}$. Mit der Kettenregel, (a) und (b)
$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x \cdot x)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_k}(x \cdot x) = \frac{1}{2}(x \cdot x)^{-1/2} (e_k \cdot x + x \cdot e_k) = \frac{1}{2}(x \cdot x)^{-1/2}\, 2x_k = (x \cdot x)^{-1/2}\, x_k.$$
Um zu zeigen, dass f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist benutzen wir, dass $|t|$ in $t = 0$ nicht differenzierbar ist (vgl. Bsp. 7.4(i)) und daher auch
$$\frac{d}{dt}(\|0 + tx\|)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\|tx\|)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(|t|\underbrace{\|x\|}_{\text{konst.}})|_{t=0}$$
nicht. Also existiert keine Richtungsableitung von f an der Stelle $x = 0$.

(d) In Komponenten $h_j(x) = x_j\|x\|^{-1}$. Für $j \neq k$ ist natürlich x_j unabhängig von x_k und daher

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_k} = x_j\,(-1)\|x\|^{-2}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\|x\| = x_j\,(-1)\|x\|^{-2}\,x_k\|x\|^{-1} = -x_k x_j\|x\|^{-3}.$$

Aber für $j = k$ müssen wir die Quotientregel benutzen:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x) = \frac{1\cdot\|x\| - x_k\cdot\frac{x_k}{\|x\|}}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_k^2}{\|x\|^3}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_k}{\|x\|^3}x_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_k}{\|x\|^3}x_k \\ \vdots \\ \frac{x_k}{\|x\|^3}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{\|x\|} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x_k}{\|x\|^3}x_1 \\ \vdots \\ -\frac{x_k}{\|x\|^3}x_k \\ \vdots \\ \frac{x_k}{\|x\|^3}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|x\|}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{x_k}{\|x\|^3}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|}e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}x.$$

(e) Ist $v = (v_1, \dots, v_n) = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, so gilt

$$h'(x)v = h'(x)\Big(\sum_{k=1}^n v_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^n v_k \cdot h'(x)e_k = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \sum_{k=1}^n v_k\left(\frac{1}{\|x\|}e_k - \frac{x_k}{\|x\|^3}x\right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|}\underbrace{\sum_{k=1}^n v_k e_k}_{=v} - \frac{1}{\|x\|^3}\underbrace{\sum_{k=1}^n v_k x_k}_{=v\cdot x}\cdot x = \frac{1}{\|x\|}v - \left(\frac{v\cdot x}{\|x\|^3}\right)x.$$