Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

14. April 2021

5. Übung

14. Beispiele von Ableitungen.

Zeige, dass A die Ableitung von f in $\mathbf{x}_0$ (nach Definition 10.10) ist.

Bemerke: A^T heißt die transponierte oder gespiegelte Matrix. Beispiele:

$$(1,2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (1,2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man benutzt es oft, um ein Vektor in eine einzelne Zeile zu schreiben.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\cos x, \sin x)^T,\ A = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T,\ \mathbf{x}_0 = 3\pi/4.$ *(3 Punkte)*

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - y^2,\ A = (2,-2),\ \mathbf{x}_0 = (1,1)^T.$ *(4 Punkte)*

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)^T,\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_0 = (2,-1)^T.$ *(3 Bonuspunkte)*

15. Ableitung affiner Abbildungen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Schrankensatz.]

(b) *Beweise:* Ist f' konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

16. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume, $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \to Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ auf U beschränkt ist. *Zeige,* dass f Lipschitz-stetig ist. *(4 Punkte)*

17. Eine Volterra-gleichung.

Seien der Integraloperator $I : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ mit

$$I(f)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

aus Aufgabe 12, $0 < \lambda < 1$, und $\mathbb{1} : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ der Identitätsoperator. Benutze eine Neumannsche Reihe, um die Volterra-gleichung $f = 1 + \lambda I(f)$ für $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ zu lösen:

(a) Warum wissen wir, dass $\mathbb{1} - \lambda I$ invertierbar ist? *(2 Punkte)*

(b) Schreibe $(\mathbb{1} - \lambda I)^{-1}$ als eine Neumannsche Reihe. *(1 Punkt)*

(c) Berechne $I(1)$ und $I(I(1))$. Was ist $I^n(x)$? *(3 Punkte)*

(d) Zeige, dass $f(x) = \exp \lambda x$ die eindeutige Lösung ist. *(2 Bonuspunkte)*

(e) Gilt auch diese Lösung für $\lambda \geq 1$? Warum haben wir dann $0 < \lambda < 1$ setzen? *(Nur zum Nachdenken.)*