Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

14. April 2021

5. Übung

14. Beispiele von Ableitungen.

Zeige, dass A die Ableitung von f in $\mathbf{x}_0$ (nach Definition 10.10) ist.

Bemerke: A^T heißt die transponierte oder gespiegelte Matrix. Beispiele:

$$(1,2)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (1,2), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Man benutzt es oft, um ein Vektor in eine einzelne Zeile zu schreiben.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (\cos x, \sin x)^T,\ A = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T,\ \mathbf{x}_0 = 3\pi/4.$ *(3 Punkte)*

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - y^2,\ A = (2,-2),\ \mathbf{x}_0 = (1,1)^T.$ *(4 Punkte)*

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)^T,\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_0 = (2,-1)^T.$

(3 Bonuspunkte)

Lösung. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} & \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

stetig ist. Aber gilt das genauso wenn $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0$. Auf $\mathbb{R}$ ist $\|\cdot\| = |\cdot|$ und auf $\mathbb{R}^2$ können wir jede Norm benutzen; wir benutzen die 1-Norm.

(a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\left\| \begin{pmatrix} \cos x + 1/\sqrt{2} \\ \sin x - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (x - 3\pi/4) \right\|}{|x - 3\pi/4|} \\
&= \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\left\| \begin{pmatrix} \cos x + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}(x - 3\pi/4) \\ \sin x - 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}(x - 3\pi/4) \end{pmatrix} \right\|}{|x - 3\pi/4|} \\
&= \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\left|\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})\right| + \left|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})\right|}{|x - 3\pi/4|} \\
&= \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\left|\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})\right|}{|x - 3\pi/4|} + \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\left|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})\right|}{|x - 3\pi/4|} \\
&= \left| \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})}{x - 3\pi/4} \right| + \left| \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})}{x - 3\pi/4} \right|
\end{aligned}$$

Beide Limes haben die Form 0/0, also können wir L'Hôptials Regel benutzen

$$\lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})}{x - 3\pi/4} = \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = 0$$
$$\lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{3\pi}{4})}{x - 3\pi/4} = \lim_{x\to 3\pi/4} \frac{\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}
0 \le \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} & \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{\left| x^2 - y^2 - (1-1) - (2,-2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right|}{\|(x-1,y-1)^T\|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|x^2 - 1 - y^2 + 1 - 2(x-1) + 2(y-1)|}{|x-1| + |y-1|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|[x^2 - 1 - 2(x-1)] - [y^2 - 1 - 2(y-1)]|}{|x-1| + |y-1|} \\
&\le \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|x^2 - 1 - 2(x-1)| + |y^2 - 1 - 2(y-1)|}{|x-1| + |y-1|} \\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|x^2 - 1 - 2(x-1)|}{|x-1| + |y-1|} + \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|y^2 - 1 - 2(y-1)|}{|x-1| + |y-1|} \\
&\le \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|x^2 - 1 - 2(x-1)|}{|x-1|} + \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{|y^2 - 1 - 2(y-1)|}{|y-1|} \\
&= \left| \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{2x-2}{1} \right| + \left| \lim_{\mathbf{x}\to(1,1)^T} \frac{2y-2}{1} \right| = 0
\end{aligned}$$

Nach der Sandwichregel ist das Limes null.

(c) Wir haben zwei Idee gesehen: (1) wenn der Definitionsbereich ein (> 2 dim) Vektorraum ist, dann verteilt die 1-Norm den Zähler als zwei Komponenten, (2) wenn der Wertbereich ein Vektorraum ist, dann benutzt man diese Abschätzung, um der Nenner zu vereinfachen.

Hier sollten wir beides benutzen.

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{\left\|\begin{pmatrix}x^2+y^2\\x^2-y^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4+1\\4-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}\right\|}\\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{\left\|\begin{pmatrix}x^2+y^2-5\\x^2-y^2-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4(x-2)-2(y+1)\\4(x-2)+2(y+1)\end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}\right\|}\\
&= \lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{\left|x^2+y^2-5-4(x-2)+2(y+1)\right|+\left|x^2-y^2-3-4(x-2)-2(y+1)\right|}{|x-2|+|y+1|}\\
&\le \lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{|x^2-4-4(x-2)|+|y^2-1+2(y+1)|+|x^2-4-4(x-2)|+|-y^2+1-2(y+1)|}{|x-2|+|y+1|}\\
&= 2\lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{|x^2-4-4(x-2)|}{|x-2|+|y+1|}+2\lim_{\mathbf{x}\to(2,-1)^T} \frac{|y^2-1+2(y+1)|}{|x-2|+|y+1|}\\
&\le 2\lim_{x\to2} \frac{|x^2-4-4(x-2)|}{|x-2|}+2\lim_{y\to-1} \frac{|y^2-1+2(y+1)|}{|y+1|}\\
&= 2\left|\lim_{x\to2} \frac{2x-4}{1}\right|+2\left|\lim_{y\to-1} \frac{2y+2}{1}\right| = 0.
\end{aligned}
$$

15. Ableitung affiner Abbildungen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume und $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung.

(a) *Beweise:* Ist $f'(x) = 0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ für jedes $x \in X$, so ist f konstant. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* Schrankensatz.]

(b) *Beweise:* Ist f' konstant, d.h. gibt es ein $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $f'(x) = A$ für jedes $x \in X$, so gibt es ein $c \in Y$ mit $f(x) = A(x) + c$ für jedes $x \in X$. *(4 Punkte)*
[*Tipp:* $x \mapsto f(x) - A(x)$.]

Lösung.

(a) Wegen $f' \equiv 0$ ist $\|f'\|$ offenbar beschränkt und somit ist die Voraussetzung des Schrankensatzes (Kor 10.b) erfüllt. Nach diesem gilt für alle $a, b \in X$, dass

$$\|f(b)-f(a)\| \le \|b-a\|\cdot \underbrace{\sup\{\underbrace{\|f'(x)\|}_{=0} \mid x \in \{(1-t)a+tb \mid t\in[0,1]\}\}}_{=0} = 0$$

und somit $f(a) = f(b)$. Dies zeigt, dass f konstant ist.

(b) Die lineare Abbildung $A : X \to Y$ ist nach Bsp. 10.3(ii) differenzierbar mit $A'(x) = A$ für alle $x \in X$. Daher ist auch die Abbildung $g : X \to Y$, $x \mapsto f(x) - A(x)$ differenzierbar und für $x \in X$ gilt

$$g'(x) = f'(x) - A'(x) = A - A = 0.$$

Daher ist g nach (a) konstant, etwa $g(x) = c$ für alle $x \in X$ $(c \in Y)$. Damit ist dann $f(x) = A(x) + g(x) = A(x) + c$ nach der Definition von g.

16. Über die Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen.

Es seien X, Y normierte Vektorräume, $U \subset X$ eine offene und konvexe Teilmenge und $f : U \to Y$ eine differenzierbare Funktion, so dass $\|f'\|$ auf U beschränkt ist. *Zeige,* dass f Lipschitz-stetig ist. *(4 Punkte)*

Lösung. Sei $\|f'(x)\| \le M$ für alle $x \in U$ mit $M \in \mathbb{R}^+$ und seien $a, b \in U$ vorgegeben. Da zudem U konvex ist sind die Voraussetzungen des Schrankensatzes (Kor. 10.6) erfüllt. Deshalb gilt

$$\|f(b) - f(a)\| \le \|b - a\| \cdot \sup\{\|f'(x)\| \mid x \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}\} \le \|b - a\| \cdot M.$$

Also ist f Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante M).

Bonus Frage: Kann man eine nicht konvexe Teilmenge finden, so dass die Aussage nicht gilt?

Lösung: Die Aussage gilt nicht, wenn U nicht als konvex vorausgesetzt wird. Denn betrachte z.B. $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$ und die Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ \cos(x) - 1 & \text{für } x > 0 \text{ und } y > 0, \\ 1 - \cos(x) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0. \end{cases}$$

Dann sind die partiellen Ableitungen von f gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ -\sin(x) & \text{für } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ \sin(x) & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0. \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Diese sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}_0^+\}$ stetig und beschränkt und somit ist f dort stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Jedoch gilt für $\varepsilon > 0$, dass $f(\pi/2, \varepsilon) = -1$ und $f(\pi/2, -\varepsilon) = 1$. Also ist

$$|f(\pi/2, \varepsilon) - f(\pi/2, -\varepsilon)| = 2.$$

Somit ist f nicht Lipschitz-stetig, denn es gibt kein $L > 0$, so dass $d(f(x), f(y)) \le L d(x, y)$.

17. Eine Volterra-gleichung.

Seien der Integraloperator $I : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ mit

$$I(f)(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

aus Aufgabe 12, $0 < \lambda < 1$, und $\mathbb{1} : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ der Identitätsoperator. Benutze eine Neumannsche Reihe, um die Volterra-gleichung $f = 1 + \lambda I(f)$ für $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ zu lösen:

(a) Warum wissen wir, dass $\mathbb{1} - \lambda I$ invertierbar ist? *(2 Punkte)*

(b) Schreibe $(\mathbb{1} - \lambda I)^{-1}$ als eine Neumannsche Reihe. *(1 Punkt)*

(c) Berechne $I(1)$ und $I(I(1))$. Was ist $I^n(x)$? *(3 Punkte)*

(d) Zeige, dass $f(x) = \exp \lambda x$ die eindeutige Lösung ist. *(2 Bonuspunkte)*

(e) Gilt auch diese Lösung für $\lambda \geq 1$? Warum haben wir dann $0 < \lambda < 1$ setzen? *(Nur zum Nachdenken.)*

Lösung.

(a) Wir wissen nach Aufgabe 12, dass $\|I\| = 1$. Also $\|\lambda I\| = |\lambda|\,\|I\| < 1$. Es folgt nach Satz 9.63, dass $\mathbb{1} - \lambda I$ invertierbar ist.

(b) $(\mathbb{1} - \lambda I)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n I^n(g)$.

(c)

$$I(1) = \int_0^x 1\;dt = \Big[t\Big]_0^x = x.$$

$$I(I(1)) = I(x) = \int_0^x t\;dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2.$$

$$I^n(1) = I(I^{n-1}(x)) = I\Big(\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\Big) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}\;dt = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{1}{n}t^n\right]_0^x = \frac{1}{n!}x^n.$$

(d)

$$f = 1 + \lambda I f \qquad \Leftrightarrow \mathbb{1}\, f - \lambda I f = 1 \qquad \Leftrightarrow (\mathbb{1} - \lambda I) f = 1$$

$$\Leftrightarrow f = (\mathbb{1} - \lambda I)^{-1} 1 \qquad \Leftrightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n I^n(1) \qquad \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{1}{n!} x^n$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda x)^n \qquad \Leftrightarrow f(x) = \exp \lambda x.$$

(e) Ja, heir ist $\exp \lambda x$ auch eine Lösung für alle λ. Denn ist $\|I^n(1)\|_\infty = \|\frac{1}{n!}x^n\|_\infty = \frac{1}{n!}$ und es geht schnell gegen 0. Aber gibt es z.B. für die ähnliche Gleichung $f = e^x + \lambda I(f)$ und $\lambda > 1$ keine Lösung.

Der wichtige Punkt ist: eine lineare Gleichung $Af = g$ muss eine eindeutige Lösung haben, wenn A invertierbar ist, aber sie kann 0, 1, oder mehr Lösungen haben (abhängend von A und g), wenn A nicht invertierbar ist.