Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

24. März 2021

Abgabefrist von diesem Übungsblatt ist Mittwoch, der 14. April um 12:00 Uhr (nach der Osternpause).

4. Übung

11. Stetigkeit und Linearität

(a) Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und Stetigkeit. Berechne gegebenenfalls die Operatornorm.

(i) Seien $0 < r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_1 : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} rx \\ r\cos(t)y - r\sin(t)z \\ r\sin(t)y + r\cos(t)z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

(ii)

$$\begin{aligned} f_2 : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}y}{|x|+|y|} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

(3 Punkte)

(b) Seien V, W normierte Räume, Zeige, dass für die Operatornorm eines $A \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|A\|_{op} &:= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V \leq 1\big\} \\ &= \sup\big\{\|Av\|_W \mid \|v\|_V = 1\big\} \\ &= \sup\big\{\tfrac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} \mid v \in V \setminus \{0\}\big\} \\ &= \inf\big\{C \in \mathbb{R} \ : \ \|Av\| \leq C\|v\| \mid v \in V\big\}. \end{aligned}$$

(3 Punkte)

12. HDI mal anders.

Sei $a < b$. Wir betrachten den Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ als normierten Raum mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\{\,|f(x)|\,|\, x \in [a,b]\,\}$. (Da stetige Funktionen auf Kompakat beschränkt sind, ist die Norm wohldefiniert.) Weiter sei $C^1([a,b],\mathbb{R})$ der in Aufgabe 1(c) definierte Unterraum von $C([a,b],\mathbb{R})$. Also hat in diesem Situation $C^1([a,b],\mathbb{R})$ auch die

Norm $\|\cdot\|_\infty$. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ die stetige Fortsetzung der Ableitung von f auf $[a,b]$.
Wir untersuchen den "Differentialoperator" von $C^1([a,b],\mathbb{R})$, d.h. die Abbildung

$$D : C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f'\ .$$

(a) *Zeige*, dass die Abbildung D linear ist und *bestimme* ihren Kern, d.h. die Menge (sogar linearen Unterraum) $\ker(D) = \{f \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \mid D(f) = 0\}$. *(2 Punkte)*

(b) *Zeige*, dass D an *keiner* Stelle $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ stetig ist. *(3 Punkte)*
[*Tipp:* Zu zeigen ist, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $\delta > 0$ eine Funktion $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ existiert mit $\|f-g\|_\infty < \delta$ und $\|D(f) - D(g)\|_\infty \geq \varepsilon$. Dabei kann hier $\varepsilon := 1$ gewählt werden. D.h. die Norm von $f-g$ ist klein, aber die Norm von $D(f-g)$ ist nicht so klein. Untersuche $c\sin(x/c)$ auf $[-c\pi, c\pi]$ für $c > 0$.]

Nun betrachten wir den "Integraloperator" $I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C^1([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto I(f)$, der durch

$$I(f)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in [a,b]$$

gegeben ist.

(c) *Zeige*, dass die Abbildung I linear ist und *bestimme* ihren Kern. *(2 Punkte)*

(d) *Zeige*, dass I Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

(e) Was ist die Operatornorm von I? *(1 Punkte)*

(f) *Zeige*, dass I ein "Rechts-Inverses" von D ist, d.h. dass

$$D \circ I : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),\ f \mapsto f$$

gilt und *bestimme* das Bild von D. (*Kurzschreibweise:* $D \circ I = \mathbb{1}_{C([a,b],\mathbb{R})}$.) *(3 Bonuspunkte)*

13. Die Exponentialfunktion für Matrizen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch den Raum der reellen $(n\times n)$-Matrizen. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, konvergiert für jedes $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Potenzreihe $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ heißt die *(matrixwertige) Exponentialabbildung*.

(a) Seien $t, s \in \mathbb{R}$. *Berechne* $\exp(A)$ für die folgenden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$:

(i) $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

(1+1+2 Bonuspunkte)

[*Tipp:* Man rechne jeweils zuerst A^n für $n \leq 3$ aus, um auf Ideen zu kommen, wie A^n allgemein aussieht.]

(b) *Berechne* $e^A \cdot e^B$ und $e^B \cdot e^A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Bonuspunkte)

(c) Sei $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \cdot B = B \cdot A$. *Zeige:* $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Hierbei darf ohne Beweis benutzt werden, dass auch für miteinander kommutierende Matrizen die binomische Formel $(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}$ gilt. *(2 Bonuspunkte)*

(d) *Folgere* aus (c), dass $\exp(A)$ stets invertierbar ist mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$. *(1 Bonuspunkte)*

(e) *Zeige*, dass für beliebiges $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ und invertierbares $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ gilt, dass $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ gilt und *folgere* hieraus, dass für diagonalisierbares $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ auch e^A diagonalisierbar ist. *(2 Bonuspunkte)*

Zusatzaufgabe für Ostern

A. Die Metrik aus einer Norm ist besondere

Seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $d(v,w) = \|v - w\|$ die induzierte Metrik.

(a) Zeige, dass d Translationsinvarianz hat. d.h. $\forall u, v, w \in V$ gilt $d(u+w, v+w) = d(u,v)$. *(1 Bonuspunkt)*

(b) Zeige, dass d Homogenität hat. d.h. $\forall v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v,w)$. *(1 Bonuspunkt)*

(c) Beweise: für jede Metrik d auf V mit dieser zwei Eigenshaften ist $\|v\| := d(v, 0)$ eine Norm. (Hier ist das 'Gegenteil' von Satz 9.5) *(3 Bonuspunkte)*

(d) Wie kann mann sehen, dass die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}^2$ nicht aus einer Norm kommt? *(1 Bonuspunkt)*

(e) Wie kann mann sehen, dass die 'Kamm-metrik' in GÜ2 nicht aus einer Norm kommt? Die Kamm-metrik ist definiert auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$d_{Kamm}(x,y) = \begin{cases} |y_2 - x_2| & \text{falls } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2| & \text{falls } x_1 \neq y_1. \end{cases}$$

(1 Bonuspunkt)

B. Der Funktionenraum $B([0,1], \mathbb{R})$.

Mit $B([0,1],\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Banachraum der beschränkten Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Für $f \in B([0,1],\mathbb{R})$ definieren wir eine Funktion $F(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(f)(x) := f(\tfrac{x}{3}) \quad \text{für } x \in [0,1]. \qquad (\diamond)$$

(a) *Zeige* $F(f) \in B([0,1],\mathbb{R})$. Wegen (a) wird durch $(\diamond)$ eine Abbildung

$$F : B([0,1],\mathbb{R}) \to B([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto F(f)$$

definiert. Zeige, dass F linear ist. *(2 Bonuspunkte)*

(b) *Zeige:* F ist Lipschitz-stetig; als Lipschitz-Konstante kann $L = 1$ gewählt werden. *(1 Bonuspunkt)*

(c) Berechne $\|F\|_{op}$. *(1 Bonuspunkt)*

C. Derivationen.

Sei V ein Banachraum. Für $A \in \mathcal{L}(V)$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_A : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V),\ L \mapsto A \cdot L - L \cdot A.$$

(a) *Berechne* $D_A(L)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. *(1 Bonuspunkt)*

(b) *Zeige*, dass D_A eine Derivation auf $\mathcal{L}(V)$ ist, d.h. dass für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$D_A(L_1 \cdot L_2) = D_A(L_1) \cdot L_2 + L_1 \cdot D_A(L_2)\ .$$ *(1 Bonuspunkt)*

(c) Sei $A \in \mathcal{L}(V)$. Dann sind Links- und Rechtsmultiplikation $\ell(A)$ und $r(A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ definiert als

$$\ell(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto A \cdot L$$

und

$$r(A) : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \quad L \mapsto L \cdot A.$$

Zeige, dass für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt

$$r(B)\ell(A) = \ell(A)r(B).$$ *(1 Bonuspunkt)*

(d) *Zeige*, dass $\exp(\ell(A)) = \ell(\exp(A))$ und dass $\exp(r(A)) = r(\exp(A))$.
Tipp: Zeige, dass $\ell(A^n) = (\ell(A))^n$ bzw. $r(A^n) = (r(A))^n$ und benutze dieses.
(2 Bonuspunkte)

(e) *Zeige* mit Hilfe von Aufgabe 13(c) sowie (c) und (d), dass

$$\exp(D_A)L = \exp(A) \cdot L \cdot \exp(-A).$$

Dabei wird $\exp(D_A)$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ und $\exp(\pm A)$ in $\mathcal{L}(V)$ gebildet. *(2 Bonuspunkte)*

D. Eine andere Vervollständigung von $\mathbb{Q}$

In einem vollständigen Metrikraum hat jede Cauchyfolge ein Grenzwert. In einem unvollstädigen Metrikraum X, haben manche Cauchyfolge kein Grenzwert und wir sagen dann, dass es 'vermisste' Punkte gibt. Wenn wir einen vollständigen Metrikraum Y finden, so dass $X \subset Y$ und $\overline{X} = Y$, nennen wir Y der Vervollständigung von X. Y enthält diese vermisste Punkte. Jede Cauchyfolge in X hat eine Grenzwert in Y und jede Punkt in Y ist das Grenzwert von einer Cauchyfolge in X.

Wie kann man aber Y finden? Hier ist eine Idee. Wir beginnen mit einem größen Metrikraum Z, dem vollständig ist, und finden eine Abbildung $\Phi : X \to Z$. Wenn Φ eine Isometrie ist, dann sind effektiv X und $\Phi[X]$ der gleiche Raum. Setze $Y := \overline{\Phi[X]}$. Weil Y abgeschlossen im vollständigen Metrikraum Z, folgt es dass Y auch vollständig ist. Also ist Y die Vervollständigung von X.

Satz 9.47 benutzt diese Strategie. Da ist $Z = C_b(X, \mathbb{R})$ und $\Phi = I$ für $I(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$. Unten geben wir einanderes Beispiel: eine Aufgabe zum Fall $X = \mathbb{Q}$ mit $Z = C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\Phi : \mathbb{Q} \to C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Welche Satz sagt, dass $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (mit Supremum-Norm) vollständig ist? *(1 Bonuspunkt)*

(b) Jetzt definieren wir $\Phi : \mathbb{Q} \to C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Das heißt, für jede $r \in \mathbb{Q}$, $\Phi(r)$ eine stetige beschränkte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sein muss. Setze $\Phi(r)(x) = r$. Die ist klar eine konstante Funktion, also stetig und beschränkt.
Zeige, dass Φ injektiv ist. *(1 Bonuspunkt)*
[Sie müssen zeigen, wenn $\Phi(r)$ und $\Phi(s)$ die gleiche Funktion ist, dass $r = s$]

(c) Zeige, dass Φ eine Isometrie ist: $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ gilt $d(r,s) = d'(\Phi(r), \Phi(s))$ für $d(r,s) = |r-s|$ auf $\mathbb{Q}$ und $d'(f,g) = \|f-g\|_\infty$ auf $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *(2 Bonuspunkte)*

(d) Nach der Strategie haben wir eine Vervollständigung $Y := \overline{\Phi[\mathbb{Q}]} \subset C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ von $\mathbb{Q}$ gefunden. Beschreibe die Funktionen in Y. Warum ist Y äquivalent zu $\mathbb{R}$? *(1 Bonuspunkt)*

(e) Mache Aufgabenteilen (a)-(c) für Satz 9.47: $X = \mathbb{Q}$, $Z = C_b(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ und $\Phi(r)(y) = d(r,y) - d(0,y)$. *(2 Bonuspunkte)*

(f) Warum kann wir mit diesem Beweis die reelle Zahlen nicht *ex nihilo* konstruieren? Deshalb müssen wir Dedekindsche Schnitte (Schnitt 2.7) oder Aufgabe 7 benutzen.

(0 Bonuspunkte, nur Aufklärung)