Martin Schmidt
Ross Ogilvie

17. März 2021

Analysis II

3. Übung

8. Entweder oder, und, keins von beidem.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ offen oder abgeschlossen sind:

(i) $M_1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1 \}$. *(2 Punkte)*

(ii) $M_2 := \left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. *(2 Punkt)*

(iii) $M_3 := \{(0,0)\} \cup M_2$. *(1 Punkte)*

(b) Es sei nun (X,d) ein metrischer Raum und $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(i) *Zeige:* $\{ x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \}$ ist abgeschlossen in X. *(3 Punkte)*

(ii) *Zeige:* $\{ x \in X \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0 \}$ ist offen in X. *(3 Punkte)*

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : X \to \mathbb{R}$ betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? *(2 Bonuspunkte)*

9. Stetigkeit steckt in den Komponenten.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{K}^n$ und den $\mathbb{K}^m$ jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik. Die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Zeige,* dass die “k-te Projektion” , d.h. die Abbildung

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

[*Tipp:* Beim betrachten einer bestimmten Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist diese Aufgabe schnell gelöst.]

(b) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_k := \mathrm{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ die “k-te Komponente” von f. Man definiert oft f durch $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.
Zeige: f ist genau dann stetig, wenn f_k für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist.
[*Tipp:* Aufgabenteil (a) und Aufgabe 4.] *(4 Punkte)*

(c)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass $x \mapsto f(x,0)$ und $y \mapsto f(0,y)$ Abbildungen in 0 stetig sind, aber dass f nicht in $(0,0)$ stetig ist. *(2 Punkte)*

10. Stone-Weierstraß-Bernstein

Definiere Polynomen auf $[0,1]$

$$b_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

für $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$. z.B. $b_{3,1}(x) = 3x(1-x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3$. Sie heißen Bernstein Polynomen. Sie haben die Eigenschaften:

- $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$,
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{n,k}(x) = x$,
- $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{1}{n} x(1-x)$,
- $b_{n,k}(x) \geq 0$,

für $x \in [0,1]$. Wir wollen eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ approximieren. Sei

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Wir bewiesen jetzt, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)$ für alle $n > N$ und $x \in [0,1]$ (Analysis I Def 5.23). Spiele mit diesem Beispiel `https://www.desmos.com/calculator/thtttekxwx`
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Warum gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x)$? *(2 Punkte)*

(b) Nach Analysis I Satz 5.22 wissen wir, dass f gleichmäßig stetig ist. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Zeige,

$$\sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2 Punkte)

(c) Bewiese $|f(x) - f(k/n)| \leq 2\|f\|_\infty$. *(1 Punkt)*

(d) Erkläre jeden Schritt im Folgenden:

$$\sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} b_{k,n}(x) \leq \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \delta^{-2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) \leq \delta^{-2} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \delta^{-2} n^{-1}.$$

(3 Bonuspunkte)

(e) Zusammen wird gezeigt, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \;+ \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \;+ \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} 2\|f\|_\infty b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \, \delta^{-2} n^{-1} \end{aligned}$$

für alle n und $x \in [0,1]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und $x \in [0,1]$. *(2 Bonuspunkte)*