Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

17. März 2021

3. Übung

8. Entweder oder, und, keins von beidem.

(a) Man *untersuche*, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ offen oder abgeschlossen sind:

(i) $M_1 := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x^4 + y^4 \leq 1 \,\}$. *(2 Punkte)*

(ii) $M_2 := \left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. *(2 Punkt)*

(iii) $M_3 := \{(0, 0)\} \cup M_2$. *(1 Punkte)*

(b) Es sei nun (X, d) ein metrischer Raum und $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(i) *Zeige:* $\{\, x \in X \;\mid\; f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \,\}$ ist abgeschlossen in X. *(3 Punkte)*

(ii) *Zeige:* $\{\, x \in X \;\mid\; f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0 \,\}$ ist offen in X. *(3 Punkte)*

(c) Man *belege durch ein Beispiel*, dass die Aussage aus (b)(ii) falsch wird, wenn man unendlich viele stetige Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : X \to \mathbb{R}$ betrachtet. Wie steht es mit der Aussage aus (b)(i)? *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) **(i)** $M_1 = \overline{B((0, 0), 1)}$ in $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|(x, y)\|_4 := (x^4 + y^4)^{1/4}$, denn

$$(x^4 + y^4) = 1 \;\Leftrightarrow\; (x^4 + y^4)^{1/4} = 1.$$

Daher ist M_1 abgeschlossen und nicht offen in $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\|\cdot\|_4$ (und daher bzgl. jeder Norm).

(ii) M_2 ist nicht offen, denn z.B. zu $(1, 1) \in M_2$ existiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ sogar kein $(x, y) \in M_2$ mit $0 < d((x, y), (1, 1)) < \frac{1}{2}$. Also existiert kein $\varepsilon > 0$ mit $B((1, 1), \varepsilon) \subset M_2$.
M_2 ist auch nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \in M_2$, aber $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0, 0) \notin M_2$ (vgl. Aufgabe 1.2(a)).

(iii) M_3 ist nicht offen, für das gleiche Grund als M_2.
M_3 ist abgeschlossen, denn $A = \{0\} \cup \{n^{-2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sind in $\mathbb{R}$ abgeschlossen und $M_3 = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B)$.

(b) **(i)** Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\{x \in X \mid f_k(x) = 0\} = f_k^{-1}[\{0\}]$ abgeschlossen in X. Denn f_k ist stetig und $\{0\}$ ist abgeschlossen (vgl. Korollar 9.31). Daher ist

$$\{x \in X \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}[\{0\}]$$

als Schnitt in X abgeschlossener Mengen abgeschlossen in X.

(ii) Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\{x \in X \mid f_k(x) > 0\} = f_k^{-1}[(0, \infty)]$ offen in X. Denn f_k ist stetig und $(0, \infty)$ ist offen. Daher ist

$$\{x \in X \mid f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\} = \bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}[(0, \infty)]$$

als *endlicher* Schnitt in X offener Mengen wieder offen in X.

(c) Sei $X := \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) := x + \frac{1}{n}$. Offenbar ist $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es gilt $\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) > 0\} = \big(-\frac{1}{n}, \infty\big)$ (offen in $\mathbb{R}$), jedoch ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) > 0, f_2(x) > 0, \ldots\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(-\frac{1}{n}, \infty\Big) = [0, \infty)$$

nicht offen in $\mathbb{R}$. (Der Schnitt unendlich vieler offener Mengen ist i. Allg. nicht offen.)

Teil (b)(i) bleibt richtig, weil auch der Schnitt unendlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

	offen	abgeschlossen
endlich Vereinigung, endlich Schnitt	immer offen	immer abgeschlossen
unendlich Vereinigung $\bigcup$	immer offen	kann abgeschlossen sein: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, n] = [0, \infty)$ aber muss nicht: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n^{-1}, 1] = (0, 1]$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n^{-1}, 1 - n^{-1}] = (0, 1)$
unendlich Schnitt $\bigcap$	kann offen sein: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, n) = (0, 1)$ aber muss nicht: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-n^{-1}, 1) = [0, 1)$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-n^{-1}, 1 + n^{-1}) = [0, 1]$	immer abgeschlossen

9. Stetigkeit steckt in den Komponenten.

Sei $n, m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{K}^n$ und den $\mathbb{K}^m$ jeweils mit der von einer Norm induzierten Metrik. Die Wahl der Norm ist dabei für die folgenden Stetigkeitsuntersuchungen beliebig, weil auf diesen Räumen nach Satz 9.37 je zwei Normen zueinander äquivalent sind.

(a) Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Zeige,* dass die "k-te Projektion" , d.h. die Abbildung

$$\mathrm{pr}_k : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

Lipschitz-stetig ist. *(2 Punkte)*

[*Tipp:* Beim betrachten einer bestimmten Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist diese Aufgabe schnell gelöst.]

(b) Sei $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei $f_k := \mathrm{pr}_k \circ f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ die "k-te Komponente" von f. Man definiert oft f durch $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

Zeige: f ist genau dann stetig, wenn f_k für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ stetig ist.

[*Tipp:* Aufgabenteil (a) und Aufgabe 4.] *(4 Punkte)*

(c)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases}.$$

Zeige, dass $x \mapsto f(x, 0)$ und $y \mapsto f(0, y)$ Abbildungen in 0 stetig sind, aber dass f nicht in $(0, 0)$ stetig ist. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm auf $\mathbb{K}^n$ gilt für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$|\operatorname{pr}_k(x) - \operatorname{pr}_k(y)| = |x_k - y_k| \leq \max_{j=1\ldots n} |x_j - y_j| = \|x - y\|_\infty = 1 \cdot \|x - y\|_\infty.$$

Also ist pr_k Lipschitz-stetig mit $L \leq 1$. $L = 1$ ist optimal, weil für $x = (1, \ldots, 1)$ und $y = (2, \ldots, 2)$:

$$|\operatorname{pr}_k(x) - \operatorname{pr}_k(y)| = |1 - 2| = 1 \text{ und } \|x - y\|_\infty = \max\{|1 - 2|, |1 - 2|, \ldots, |1 - 2|\} = 1.$$

(b) "$\Rightarrow$": Da pr_k nach (b) L-stetig und somit insbesondere stetig ist, ist wegen Korollar 9.32 mit f auch die Verknüpfung $f_k = \operatorname{pr}_k \circ f$ stetig.

"$\Leftarrow$": (z.B.) Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^m$, die gegen ein $a \in \mathbb{K}^m$ konvergiert. Da f_k jeweils nach Voraussetzung stetig ist, konvergiert $(f_k(a_j))_j$ jeweils gegen $f_k(a)$ nach Satz 9.30. Mit Übungsaufgabe 4 folgt, dass $f(a_j) = (f_1(a_j), \ldots, f_n(a_j))$ gegen $(f_1(a), \ldots, f_n(a)) = f(a)$ konvergiert. Also ist f stetig nach Satz 9.30.

(c) Sei $g(x) = f(x, 0) = \frac{0}{x^2+0} = 0$. Die ist natürlich stetig. Ähnlich ist $y \mapsto f(0, y) = 0$ stetig. Wähle $p_k := (x_k, y_k) = (k^{-1}, k^{-1}) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\lim_{k\to\infty} p_k = (0, 0)$. Dann

$$f(p_k) = f(x_k, y_k) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2}.$$

Also $\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \frac{1}{2}$. Aber $f(\lim p_k) = f(0, 0) = 0$. Daher ist f nicht in $(0, 0)$ stetig.

10. Stone-Weierstraß-Bernstein

Definiere Polynomen auf $[0, 1]$

$$b_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

für $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$. z.B. $b_{3,1}(x) = 3x(1 - x)^2 = 3x - 6x^2 + 3x^3$. Sie heißen Bernstein Polynomen. Sie haben die Eigenschaften:

- $\sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) = 1$,
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} b_{n,k}(x) = x$,

- $\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{1}{n} x(1-x)$,
- $b_{n,k}(x) \geq 0$,

für $x \in [0,1]$. Wir wollen eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ approximieren. Sei

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{k,n}(x).$$

Wir bewiesen jetzt, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_n(x)$ für alle $n > N$ und $x \in [0,1]$ (Analysis I Def 5.23). Spiele mit diesem Beispiel `https://www.desmos.com/calculator/thtttekxwx`
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Warum gilt $|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x)$? *(2 Punkte)*

(b) Nach Analysis I Satz 5.22 wissen wir, dass f gleichmäßig stetig ist. Es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Zeige,

$$\sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

(2 Punkte)

(c) Bewiese $|f(x) - f(k/n)| \leq 2\|f\|_\infty$. *(1 Punkt)*

(d) Erkläre jeden Schritt im Folgenden:

$$\sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} b_{k,n}(x) \leq \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} \delta^{-2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{k,n}(x) \leq \delta^{-2} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \delta^{-2} n^{-1}.$$

(3 Bonuspunkte)

(e) Zusammen wird gezeigt, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| < \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \;+ \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} |f(x) - f(k/n)| \, b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \;+ \sum_{k \,:\, |x - \frac{k}{n}| \geq \delta} 2\|f\|_\infty b_{k,n}(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \, \delta^{-2} n^{-1} \end{aligned}$$

für alle n und $x \in [0,1]$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und $x \in [0,1]$. *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a)

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) \cdot 1 - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) b_{k,n}(x) \right| \\
&= \left| f(x) \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(k/n) b_{k,n}(x) \right| \quad \text{nach Eigenschaft 1} \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} \Big[f(x) - f(k/n) \Big] b_{k,n}(x) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \Big| f(x) - f(k/n) \Big| b_{k,n}(x) \quad \text{mit der Dreiecksungleichung}
\end{aligned}
$$

(b) Weil $|x - \frac{k}{n}| < \delta$, folgt es, dass $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon/2$. Dann

$$
\sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|<\delta} |f(x) - f(k/n)|\, b_{k,n}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|<\delta} b_{k,n}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(x) = \frac{\varepsilon}{2}.
$$

(c) Das folgt nach der Dreiecksungleichung: $|f(x) - f(k/n)| \leq |f(x)| + |f(k/n)| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty$.

(d) Hier haben wir die Ungleichung von k, dass $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$. Also $1 \leq \delta^{-2}(x - \frac{k}{n})^2$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|\geq\delta} 1 \cdot b_{k,n}(x) &\leq \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|\geq\delta} \delta^{-2} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 b_{k,n}(x) \\
&= \delta^{-2} \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|\geq\delta} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 b_{k,n}(x) \\
&\leq \delta^{-2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 b_{k,n}(x), \quad \text{weil } b_{n,k}(x) \text{ nicht negativ ist} \\
&= \delta^{-2} \frac{1}{n} x(1-x), \quad \text{nach Eigenschaft 3} \\
&\leq \delta^{-2} n^{-1}, \quad \text{weil } x \text{ und } (1-x) \text{ kleiner gleich 1 sind.}
\end{aligned}
$$

(e) Wir müssen N wählen, so dass für alle $n > N$ der zweite Term kleiner als $\varepsilon/2$ ist. Bemerke

$$
2\|f\|_\infty \delta^{-2} n^{-1} < \frac{\varepsilon}{2} \iff 4\|f\|_\infty \delta^{-2} \varepsilon^{-1} < n.
$$

Wenn $N > 4\|f\|_\infty \delta^{-2}\varepsilon^{-1}$, dann stimmt das für alle $n > N$.