

2. Übung

4. Wie man's macht, man macht's richtig!

(a) Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge im \mathbb{R}^3 . Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in "Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (a_k, b_k, c_k)$ mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$. Die erste "Komponentenfolge" $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in \mathbb{R} . (b_k) und (c_k) heißen natürlich die zweite und dritte Komponentenfolge.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in \mathbb{R}^n bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn die Komponentenfolgen konvergieren. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k, \lim_{k \rightarrow \infty} b_k, \lim_{k \rightarrow \infty} c_k \right) \in \mathbb{R}^3. \quad (4 \text{ Punkte})$$

(b) *Untersuche*, ob die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \left(\sqrt[k]{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^3$$

in \mathbb{R}^3 konvergiert und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. (2 Punkte)

Bemerkung 1. Es ist klar, dass das Bewies von (a) in aller Dimension \mathbb{R}^n gilt. Für die Komponenten von einer Folge $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ kann man $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$ oder $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$ (hoch-Index, nicht Potenz) schreiben.

Bemerkung 2. In Satz 9.37 haben wir gesehen, dass je zwei Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem \mathbb{R}^n . Wenn also von der "Konvergenz im \mathbb{R}^n " (ohne ausdrückliche Angabe einer Norm) die Rede ist, sind damit die Konvergenz bezüglich aller möglichen Normen beziehungsweise der Konvergenz der Komponentenfolgen gemeint.

Bemerkung 3. Alle p -Normen auf \mathbb{R} sind genau gleich. Nämlich für $x \in \mathbb{R}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x|^p} = |x|$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x|\} = |x|$.

(c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf \mathbb{R}^3 ? (2 Punkte)

5. Stetig in 2D.

Zeige, dass diese Funktionen stetig in 0 oder $(0, 0)$ sind:

(a) $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $t \mapsto (2t, t - 1)$. (2 Punkte)

(b) $g : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x, y) \mapsto x + y$. (2 Punkte)

(c) $h : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$. (2 Punkte)

Zeige, dass diese Funktion nicht stetig in $(0, 0)$ ist:

$$(d) \quad j : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ 1 & \text{für } y = 0. \end{cases} \quad (2 \text{ Punkte})$$

[Tipp. Benutze Aufgabe 4 und Korollar 9.31(ii)]

6. Offen für Neues.

- (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass jeder offene Ball in (X, d) eine offene Menge in (X, d) ist. (3 Punkte)
- (b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. (2 Punkte)
- (c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. (2 Punkte)
- (d) *Gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0, 1)$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. (2 Punkte)

7. Eine konstruktive Alternative.

In Analysis I Schnitt 2.6 haben wir \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q} konstruiert. In dieser Aufgabe wollen wir \mathbb{R} als die Vervollständigung von \mathbb{Q} konstruieren.

Sei dazu \mathfrak{C} die Menge der Cauchyfolgen in \mathbb{Q} . Das heißt, eine Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n , aber das Grenzwert muss nicht in \mathbb{Q} liegen.

Wir definieren für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ die Relation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genauso wenn $(x_n - \tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Explizit: genauso wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N existiert, so dass $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Wenn die Grenzwerte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleich sind, ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aber unsere Definition spricht nicht über dem Grenzwert, also es funktioniert auch dann, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kein Grenzwert in \mathbb{Q} hat.

- (a) Zeige, dass durch " \sim " eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert ist. (2 Bonuspunkte)

Die Äquivalenzklasse $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ ist die Menge aller Cauchyfolgen, denen zu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ äquivalent sind. Wir wollen noch nicht eine Metrik auf der Menge von Äquivalenzklassen \mathfrak{C}/\sim geben, weil die Definition von einer Metrik \mathbb{R} benutzt. Aber wir können ihr die Struktur eines angeordneten Körpers (Analysis I Kapitel 2 Axiome A1-A4) geben, und zeigen das sie A5 auch erfüllt. Wir nennen dann $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$, weil der Körper mit A1-A5 eindeutig ist.

- (b) Zeige, dass die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist. Benutze nicht Eigenschaften von \mathbb{R} .
[Tipp. Cauchyfolgen sind beschränkt] (2 Bonuspunkte)
- (c) Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeige außerdem, dass $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (2 Bonuspunkte)

Zusammen zeigen (b) und (c), dass die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{cases} [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}] \end{cases}$$

jeweils wohldefiniert auf die Menge der Äquivalenzklassen \mathfrak{C}/\sim ist.

- (d) Zeige, dass die Körperaxiome A1-A3 für \mathfrak{C}/\sim erfüllt sind. (2 Bonuspunkte)
- (e) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf \mathfrak{C}/\sim wie folgt: Es gilt $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] > [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$, genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - y_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zeige, dass dadurch eine wohldefinierte (!) Ordnungsrelation auf \mathfrak{C}/\sim definiert, die Axiom A4 erfüllt. (2 Bonuspunkte)
- (f) Definiere die Einbettungsabbildung,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathfrak{C}/\sim \\ q &\mapsto [(q)_{n \in \mathbb{N}}], \end{aligned}$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $(q)_{n \in \mathbb{N}}$ die konstante (Cauchy-)folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Man kann ohne Beweis benutzt, dass die natürlichen Zahlen in \mathfrak{C}/\sim (nach Definition 2.29) das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind.

Zeige, dass \mathfrak{C}/\sim archimedisch ist.

[Tipp. jede Cauchyfolge ist beschränkt.] (2 Bonuspunkte)

- (g) Zeige, dass \mathfrak{C}/\sim das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.50) erfüllt: Für alle Intervalle $I_n = [a_n, b_n] := \{c \in \mathfrak{C}/\sim \mid a_n \leq c \leq b_n\}$ mit:
- $a_n, b_n \in \mathfrak{C}/\sim$ und $a_n < b_n$. Das heißt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = [(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}]$ eine Äquivalenzklasse von einer Cauchyfolge in \mathbb{Q} .
 - $I_{n+1} \subset I_n$
 - Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \Phi(k^{-1})$

folgt es, dass der Durchschnitt $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einen Punkt von \mathfrak{C}/\sim enthält.

(3 Bonuspunkte)

[Tipp: Weil (f) zeigt, dass $\Phi(\mathbb{Q})$ dicht in \mathfrak{C} ist, können wir $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass $a_n < \Phi(p_n) < a_{n+1}$ und $b_{n+1} < \Phi(q_n) < b_n$. Seien $J_n = [\Phi(p_n), \Phi(q_n)]$ Intervalle in \mathfrak{C}/\sim . Bemerke $\bigcap I_n = \bigcap J_n$ und $\{J_n\}$ hat die drei Eigenschaften als $\{I_n\}$. Zeige, $x = (p_k)$ eine Cauchyfolge ist und in dem Durchschnitt liegt.]

Das Intervallschachtelungsprinzip ist äquivalent zu Axiom A5 (Vollständigkeitsaxiom), also wir haben gezeigt, dass \mathfrak{C}/\sim A5 hat.

Bemerkung: Wegen der Funktionsvorschrift von Φ ist das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ als eine "Kopie" von \mathbb{Q} in \mathfrak{C}/\sim zu verstehen. In dem man also $\Phi[\mathbb{Q}]$ mit \mathbb{Q} identifiziert, kann man daher \mathfrak{C}/\sim als eine Vervollständigung von \mathbb{Q} auffassen. Diese ist eindeutig und daher hat man auf diese Weise \mathbb{R} konstruktiv eingeführt.