Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis II

10. März 2021

2. Übung

4. Wie man's macht, man macht's richtig!

(a) Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^3$. Wir schreiben das Element $x_k \in \mathbb{R}^n$ jeweils in "Komponenten", d.h. in der Form $x_k = (a_k, b_k, c_k)$ mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$. Die erste "Komponentenfolge" $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{R}$. (b_k) und (c_k) heißen natürlich die zweite und dritte Komponentenfolge.

Zeige: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$, wenn die Komponentenfolgen konvergieren. Ist dies der Fall, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \left(\lim_{k\to\infty} a_k,\ \lim_{k\to\infty} b_k,\ \lim_{k\to\infty} c_k \right) \in \mathbb{R}^3 .$$ *(4 Punkte)*

(b) *Untersuche,* ob die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_k := \left(\sqrt[k]{k}\, ,\ (1+\tfrac{1}{k})^k\, ,\ \tfrac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^3$$

in $\mathbb{R}^3$ konvergiert und *bestimme* gegebenenfalls den Grenzwert. *(2 Punkte)*

Bemerkung 1. Es ist klar, dass das Bewies von (a) in aller Dimension $\mathbb{R}^n$ gilt. Für die Komponenten von einer Folge $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ kann man $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$ oder $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$ (hoch-Index, nicht Potenz) schreiben.
Bemerkung 2. In Satz 9.37 haben wir gesehen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die obige Aussage gilt deshalb nicht nur bezüglich der Maximumnorm, sondern auch bezüglich jeder beliebigen anderen Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Wenn also von der "Konvergenz im $\mathbb{R}^n$" (ohne ausdrückliche Angabe einer Norm) die Rede ist, sind damit die Konvergenz bezüglich aller möglichen Normen beziehungsweise der Konvergenz der Komponentenfolgen gemeint.
Bemerkung 3. Alle p-Normen auf $\mathbb{R}$ sind genau gleich. Nämlich für $x \in \mathbb{R}$, $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x|^p} = |x|$ und $\|x\|_\infty = \max\{|x|\} = |x|$.

(c) Konvergiert die Folge aus (b) bezüglich der diskreten Metrik (Beispiel 9.2(i)) auf $\mathbb{R}^3$? *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) "$\Leftarrow$" Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige konvergierte Folge in $\mathbb{R}^3$ mit Grenzwert $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Dann für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > N$:

$$|a_n - a| \le \max\{|a_n - a|, |b_n - b|, |c_n - c|\} =: \|x_n - x\|_\infty < \varepsilon.$$

Also $\lim a_n = a$. b_n und c_n sind ähnlich.
"$\Rightarrow$" In diesem Fall wissen wir $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und $\lim c_n = c$. Sei $x := (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Weil die Folgen konvergiert sind, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Zahlen $N_a, N_b, N_c \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \ \ \forall n > N_a, \ \ |b_n - b| < \varepsilon \ \ \forall n > N_b, \ \ |c_n - c| < \varepsilon \ \ \forall n > N_c.$$

Sei $N = \max\{N_a, N_b, N_c\}$. Dann gilt es für alle $n > N$

$$\|x_n - x\|_\infty = \max\{|a_n - a|, |b_n - b|, |c_n - c|\} < \varepsilon.$$

Also $\lim x_n = x = (a, b, c)$.

(b) Wir wissen $\sqrt[k]{k} \to 1$, $(1 + k^{-1})^k \to e$, und $k^{-1} \to 0$. Deshalb ist $\lim x_k = (1, e, 0)$ nach (a).

(c) Nein. Angenommen, x_k konvergiert gegen x für ein $x \in \mathbb{R}^3$ mit der diskreten Metrik. d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N : d(x_n, x) < \varepsilon$. Aber, wähle $\varepsilon = 0.5$. In der diskreten Metrik impliziert $d(x, y) < 1$, dass $x = y$. Daher ist $x_n = x$ für alle $n > N$. Die Folge in (b) wird nicht eine konstante Folge, also konvergiert es nicht in der diskreten Metrik. Sehe auch Größeübung 2.

5. Stetig in 2D.

Zeige, dass diese Funktionen stetig in 0 oder $(0, 0)$ sind:

(a) $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ t \mapsto (2t, t - 1)$. *(2 Punkte)*

(b) $g : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x, y) \mapsto x + y$. *(2 Punkte)*

(c) $h : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2),\ (x, y) \mapsto (-y, x)$. *(2 Punkte)*

Zeige, dass diese Funktion nicht stetig in $(0, 0)$ ist:

(d) $j : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } y \neq 0, \\ 1 & \text{für } y = 0. \end{cases}$ *(2 Punkte)*

[Tipp. Benutze Aufgabe 4 und Korollar 9.31(ii)]

Lösung.

(a) Sei (t_n) eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen 0 konvergiert. Nach Korollar 9.31(ii) müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} (2t_n, t_n - 1) \quad \text{und} \quad f\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = f(0) = (0, -1)$$

sind gleich. Aber das ist einfach. Nach Aufgabe 4

$$\lim_{n\to\infty} (2t_n, t_n - 1) = \left(\lim_{n\to\infty} 2t_n, \lim_{n\to\infty} t_n - 1\right) = (0, -1).$$

(b) Sei (x_n, y_n) gegen $(0, 0)$ konvergiert, als eine Folge von Punkte in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Nochmal folgt es nach Aufgabe 4, dass $x_n \to 0$ und $y_n \to 0$ als Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt $g(x_n, y_n) = x_n + y_n \to 0 + 0 = 0$ mit der Limesrechnungregeln. Deshalb haben wir gezeigt, dass

$$\lim g(x_n, y_n) = 0 = g(0, 0) = g\left(\lim(x_n, y_n)\right).$$

(c) Hier benutzen wir Aufgabe 4 zweimal. Sei (x_n, y_n) gegen $(0,0)$ konvergiert. Also $x_n, y_n \to 0$ (und natürlich $-y_n \to 0$). Deshalb $(-y_n, x_n) \to (0,0)$ als eine Folge von Punkte in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Dies zeigt schon, dass h stetig in $(0,0)$ ist:

$$\lim h(x_n, y_n) = h(0,0) = h\left(\lim(x_n, y_n)\right).$$

(d) Sei $p_n = (0, n^{-1}) \in \mathbb{R}^2$ eine Folge gegen $(0,0)$ konvergiert. Sofort $j(\lim p_n) = j(0,0) = 1$, weil $y = 0$. Aber

$$\lim j(p_n) = \lim \frac{0}{n^{-1}} = \lim 0 = 0,$$

weil n^{-1} nie Null ist. Das zeigt, dass es eine Folge p_n gegen $(0,0)$ konvergiert gibt, aber $\lim j(p_n) \neq j(\lim p_n)$. Das heißt, j ist nicht in $(0,0)$ stetig.

6. Offen für Neues.

(a) Sei (X,d) ein metrischer Raum. *Zeige*, dass jeder offene Ball in (X,d) eine offene Menge in (X,d) ist. *(3 Punkte)*

(b) *Beweise oder widerlege:* Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y und ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $f^{-1}[K] \subset X$ kompakt. *(2 Punkte)*

(c) *Beweise oder widerlege:* Für jede Menge X ist die diskrete Metrik auf X (siehe Beispiel 9.2(i)) vollständig. *(2 Punkte)*

(d) *Gebe explizit* eine offene Überdeckung des Intervalls $(0,1)$ *an*, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Sei $x \in X$, $r > 0$ und

$$B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

der offene Ball um x mit Radius r.

Zu zeigen: Für alle $y \in B(x,r)$ existiert ein $\tilde{r} > 0$, so dass $B(y,\tilde{r}) \subseteq B(x,r)$.

Sei also $y \in B(x,r)$. Setze

$$\tilde{r} := r - d(x,y) > 0$$

(da $y \in B(x,r)$ und somit $d(x,y) < r$).

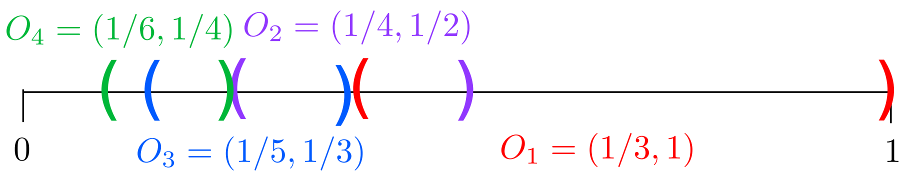
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
B(y,\tilde{r}) &= \{z \in X \mid d(y,z) < \tilde{r}\} \\
&= \{z \in X \mid d(y,z) < r - d(x,y)\} \\
&= \{z \in X \mid \underbrace{d(x,y) + d(y,z)}_{\geq d(x,z),\text{ da } d \text{ Metrik,}} < r\} \\
&\subseteq \{z \in X \mid d(x,z) < r\} = B(x,r).
\end{aligned}
$$

(b) Sei X ein beliebiger, nicht-kompakter metrischer Raum, Y ein weiterer metrischer Raum, $c \in Y$, $K := \{c\} \subset Y$ und $f : X \to Y$, $x \mapsto c$ die konstante Funktion.
Dann ist K kompakt und f stetig, aber $f^{-1}[K] = X$ ist nicht kompakt.

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X bzgl. der diskreten Metrik d, so existiert zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $n, m \geq N$ gilt $d(a_n, a_m) < \frac{1}{2}$. Hieraus folgt wg. der Definition von d aber bereits $a_n = a_m$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ab $n = N$ konstant gleich einem $a \in X$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen a. Somit ist (X, d) vollständig.

(d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $O_n := \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$. Dann ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von $(0,1)$ (es gilt sogar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = (0,1)$), aber f"ur $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$ jeweils nur in O_n, aber in keinem O_m mit $m \neq n$ enthalten. Deshalb enthält $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine endliche Teilüberdeckung von $(0,1)$.



Ein weiteres Beispiel ist $O_n = (n^{-1}, 1)$.

7. Eine konstruktive Alternative.
In Analysis I Schnitt 2.6 haben wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}.$ und $\mathbb{Q}$ konstruiert. In dieser Aufgabe wollen wir $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ konstruieren.
Sei dazu $\mathfrak{C}$ die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$. Das heißt, eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle n, aber das Grenzwert muss nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.
Wir definieren für zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{C}$ die Relation $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genauso wenn $(x_n - \tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Explizit: genauso wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ein N existiert, so dass $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
Wenn die Grenzwerte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich sind, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aber unsere Definition spricht nicht über dem Grenzwert, also es funktioniert auch dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein Grenzwert in $\mathbb{Q}$ hat.

(a) Zeige, dass durch "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Cauchyfolgen definiert ist. *(2 Bonuspunkte)*

Die Äquivalenzklasse $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ ist die Menge aller Cauchyfolgen, denen zu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent sind. Wir wollen noch nicht eine Metrik auf der Menge von Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ geben, weil die Definition von einer Metrik $\mathbb{R}$ benutzt. Aber wir können ihr das Struktur eines angeordneten Körpers (Analysis I Kapital 2 Axiome A1-A4) geben, und zeigen das sie A5 auch erfüllt. Wir nennen dann $\mathbb{R} = \mathfrak{C}/\sim$, weil der Körper mit A1-A5 eindeutig ist.

(b) Zeige, dass die Addition und die Multiplikation von zwei Cauchyfolgen selbst eine Cauchyfolge ist. Benutze nicht Eigenschaften von $\mathbb{R}$.
[Tipp. Cauchyfolgen sind beschränkt] *(2 Bonuspunkte)*

(c) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige außerdem, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(2 Bonuspunkte)*

Zusammen zeigen (b) und (c), dass die Addition und Multiplikation definiert durch

$$\begin{cases} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \end{cases}$$

jeweils wohldefiniert auf die Menge der Äquivalenzklassen $\mathfrak{C}/\sim$ ist.

(d) Zeige, dass die Körperaxiome A1-A3 für $\mathfrak{C}/\sim$ erfüllt sind. *(2 Bonuspunkte)*

(e) Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ wie folgt: Es gilt $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n - y_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Zeige, dass dadurch eine wohldefinierte (!) Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}/\sim$ definiert, die Axiom A4 erfüllt. *(2 Bonuspunkte)*

(f) Definiere die Einbettungsabbildung,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Q} &\to \mathfrak{C}/\sim \\ q &\mapsto [(q)_{n\in\mathbb{N}}], \end{aligned}$$

wobei für jedes $q \in \mathbb{Q}$, $(q)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante (Cauchy-)folge $q_n = q$ bezeichnet. Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Man kann ohne Beweis benutzt, dass die natürlichen Zahlen in $\mathfrak{C}/\sim$ (nach Definition 2.29) das Bild von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ unter Φ sind.

Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ archimedisch ist.
[Tipp. jede Cauchyfolge ist beschränkt.] *(2 Bonuspunkte)*

(g) Zeige, dass $\mathfrak{C}/\sim$ das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.50) erfüllt: Für alle Intervalle $I_n = [a_n, b_n] := \{c \in \mathfrak{C}/\sim \mid a_n \leq c \leq b_n\}$ mit:

- $a_n, b_n \in \mathfrak{C}/\sim$ und $a_n < b_n$. Das heißt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n = [(a_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}]$ eine Äquivalenzklasse von einer Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$.
- $I_{n+1} \subset I_n$
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \Phi(k^{-1})$

folgt es, dass der Durchschnitt $\cap_{n\geq 1} I_n$ genau eine Punkt von $\mathfrak{C}/\sim$ enthält.

(3 Bonuspunkte)

[*Tipp:* Weil (f) zeigt, dass $\Phi(\mathbb{Q})$ dicht in $\mathfrak{C}$ ist, können wir $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass $a_n < \Phi(p_n) < a_{n+1}$ und $b_{n+1} < \Phi(q_n) < b_n$. Seien $J_n = [\Phi(p_n), \Phi(q_n)]$ Intervalle in $\mathfrak{C}/\sim$. Bemerke $\bigcap I_n = \bigcap J_n$ und $\{J_n\}$ hat die drei Eigenschaften als $\{I_n\}$. Zeige, $x = (p_k)$ eine Cauchyfolge ist und in dem Durchschnitt liegt.]

Das Intervallschachtelungsprinzip ist äquivalent zu Axiom A5 (Vollständigkeitsaxiom), also wir haben gezeigt, dass $\mathfrak{C}/\sim$ A5 hat.

Bemerkung: Wegen der Funktionsvorschrift von Φ ist das Bild $\Phi[\mathbb{Q}]$ als eine "Kopie" von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ zu verstehen. In dem man also $\Phi[\mathbb{Q}]$ mit $\mathbb{Q}$ identifiziert, kann man daher $\mathbb{R}$ als eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ auffassen. Diese ist eindeutig und daher hat man auf diese Weise $\mathbb{R}$ konstruktiv eingeführt.

Lösung.

(a) Reflexivität: $(x_n - x_n)$ ist eine konstante Folge von Nullen. Ja, es ist eine Nullfolge.
Symmetrie: Wenn $(x_n - \tilde{x}_n)$ eine Nullfolge ist, ist auch $(\tilde{x}_n - x_n)$ eine Nullfolge.
Transitivität: Sei $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$. Wir können N wählen, so dass für alle $n > N$

$$|x_n - z_n| = |x_n - y_n + y_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Sei $X \geq 1$ ein Schrank von (x_n), d.h. $|x_n| \leq X$, und ähnlich $|y_n| < Y$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein N so dass für alle $n, m > N$, $|x_n - x_m| < \varepsilon/(2Y)$ und $|y_n - y_m| < \varepsilon/(2X)$. Dann

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$$

und

$$|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n(y_n - y_m) + (x_n - x_m)y_m| \leq |x_n|\,|y_n - y_m| + |x_n - x_m|\,|y_m| < \varepsilon.$$

(c) Wir wissen nach (b), dass $(x_n + y_n)$ eine Cauchyfolge ist.

$$(x_n + y_n) - (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n) = (x_n - \tilde{x}_n) + (y_n - \tilde{y}_n)$$

ist eine Nullfolge, weil die Summe von zwei Nullfolge ist eine Nullfolge.

$$x_n y_n - \tilde{x}_n \tilde{y}_n = x_n(y_n - \tilde{y}_n) + (x_n - \tilde{x}_n)\tilde{y}_n$$

ist eine Nullfolge, weil die Produkt von eine Cauchyfolge und eine Nullfolge ist eine Nullfolge.

(d) Wir zeigen A1(i). Sei $[(x_n)], [(y_n)] \in \mathfrak{C}/\sim$. Wähle Repräsentanten $(x_n), (y_n) \in \mathfrak{C}$. Dann

$$\begin{aligned} [(x_n)] + [(y_n)] &= [(x_n + y_n)] \text{ Definition} \\ &= [(y_n + x_n)] \ \ x_n, y_n \in \mathbb{Q} \text{ und } \mathbb{Q} \text{ hat A1(i)} \\ &= [(y_n)] + [(x_n)] \text{ Definition.} \end{aligned}$$

Eigenschaft A1(ii), A2(i,ii) und A3 sind alle ähnlich. Wir kann $0 \in \mathfrak{C}/\sim$ mit der Äquivalenzklasse von der konstanten Folge $(0, 0, \dots)$ identifizieren, weil

$$[(x_n)] + [(0)] = [(x_n + 0)] = [(x_n)].$$

Das ist A1(iii). Ähnlich $1 = [(1, 1, \dots)]$ für A2(iii) und $-[(x_n)] = [(-x_n)]$ für A1(iv).

A2(iv) ist schwerer, weil die Folge möglich Elemente, die Null sind, hat. Deshalb können wir nicht einfach $[(x_n)]^{-1} = [(x_n^{-1})]$ setzen. Sei $(x_n) \in \mathfrak{C}$ nicht äquivalent zu $(0, 0, \dots)$. Das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ so dass $n > N$ mit $|x_n - 0| = |x_n| > \varepsilon$ existiert. Wähle dieses ε. Wir benutzen jetzt, dass (x_n) Cauchy ist: Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ so dass $\forall i, j > M : |x_i - x_j| < \varepsilon/2$. Mit $N = M$ finden wir ein x_n mit $|x_n| \geq \varepsilon$. Es folgt für alle $i > M$

$$|x_i| = |x_n + x_i - x_n| \geq |x_n| - |x_i - x_n| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Deshalb ist $x_i \neq 0$ für alle $i > M$.

Setze

$$r_n := \begin{cases} x_n & \text{wenn } n \leq M, \\ (x_n)^{-1} & \text{wenn } n > M. \end{cases}$$

Wir sehen für $n > M$, dass $r_n \cdot x_n = 1$. Also $(r_n x_n) \sim (1, 1, \dots)$ und $[(r_n)]$ ist das Invers zu $[(x_n)]$.

(e) Wohldefiniert: Seien $(x_n) \sim (\tilde{x}_n)$ und $(y_n) \sim (\tilde{y}_n)$ mit $(x_n) > (y_n)$. Das heißt, es gibt $\varepsilon > 0, M \in N\ \forall m > M :\ x_m - y_m > \varepsilon$. Und es gibt N_x und N_y so dass $\forall n > \max\{N_x, N_y\} =: N$ gilt $|x_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon/3$ und $|y_n - \tilde{y}_n| < \varepsilon/3$. Wir müssen zeigen, $\exists \tilde{\varepsilon} > 0, \tilde{M} \in \mathbb{N}\ \forall m > \tilde{M} :$ $\tilde{x}_m - \tilde{y}_m > \tilde{\varepsilon}$.

Setze $\tilde{M} = \max\{N, M\}$ und $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/3$. Dann für jedes $m > \tilde{M}$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_m - \tilde{y}_m &= (\tilde{x}_m - x_m) + (x_m - y_m) - (\tilde{y}_m - y_m) \\ &\geq -|\tilde{x}_m - x_m| + (x_m - y_m) - |\tilde{y}_m - y_m| \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Also $(x_n) > (y_n)$ genauso wenn $(\tilde{x}_n) > (\tilde{y}_n)$

Totalität: Wir müssen zeigen, dass (1) $[(x_n)] > [(y_n)]$ und $[(x_n)] < [(y_n)]$ nicht passiert können, und (2) nicht $[(x_n)] > [(y_n)]$ und nicht $[(x_n)] < [(y_n)]$ impliziert $(x_n) \sim (y_n)$.

(1): Seien $(x_n) > (y_n)$ und $(x_n) < (y_n)$. Das heißt, es gibt $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > N_1$ gilt $x_n - y_n \geq \varepsilon_1 > 0$ und für alle $n > N_2$ gilt $x_n - y_n \leq -\varepsilon_2 < 0$. Aber, für $N = N_1 + N_2$ sehen wir dass $x_N - y_N$ ist größer als und kleiner als Null. Das kann nicht sein.

(2): Sei $d_n = x_n - y_n$. Wir müssen zeigen, dass $\forall \varepsilon' > 0\ \exists N' \in \mathbb{N}\ \forall m > N' :\ \ |d_m| < \varepsilon$. Wir wissen, weil d_n eine Cauchyfolge ist, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m > N :\ \ |d_n - d_m| < \varepsilon$.

"nicht $[(x_n)] > [(y_n)]$" heißt, $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \forall N_1 \in \mathbb{N}$ gibt es ein n_1 mit $d_{n_1} < \varepsilon_1$. Setze $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $N_1 = N$. Es folgt, für alle $m > N$

$$\begin{aligned} d_{n_1} &< \varepsilon \\ d_{n_1} - d_m &< \varepsilon - d_m \\ -\varepsilon < d_{n_1} - d_m &< \varepsilon - d_m \\ d_m &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ähnlich heißt "nicht $[(x_n)] > [(y_n)]$", dass $\forall \varepsilon_2 > 0 \ \forall N_2 \in \mathbb{N}$ gibt es ein n_2 mit $y_{n_2} - x_{n_2} < \varepsilon_2$. Setze $\varepsilon_2 = \varepsilon$ und $N_2 = N$. Es folgt für all $m > N$, dass $d_m > -2\varepsilon$. Daher $|d_m| < 2\varepsilon$. Für ein beliebiges $\varepsilon' > 0$, wähle $\varepsilon = \varepsilon'/2$ und $N' = N$. Wir haben gezeigt, dass $d_n = x_n - y_n$ eine Nullfolge ist, also $(x_n) \sim (y_n)$.

Transitivität: Seien $(x_n) > (y_n)$ und $(y_n) > (z_n)$. Das heißt, es gibt $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ und $N := \max\{N_1, N_2\}$. Es folgt, dass für alle $n > N$

$$x_n - y_n \geq \varepsilon, \quad y_n - z_n \geq \varepsilon.$$

Dann für alle $n > N$ gilt $x_n - z_n \geq 2\varepsilon$. Also $(x_n) > (z_n)$.

Monotonie: Sei $(x_n) > (y_n)$. Dann

$$x_n - y_n \geq \varepsilon \ \Rightarrow \ (x_n + z_n) - (y_n + z_n) \geq \varepsilon.$$

Also $(x_n) + (z_n) > (y_n) + (z_n)$.
Seien $\varepsilon > 0$ beliebig und $(c_n) > 0$. Daher gibt es ε_2 mit $c_n \geq \varepsilon_2$ für alle $n > N_2$. Es gibt auch ein N_1 mit $x_n - y_n \geq \varepsilon/\varepsilon_2$ für $n > N_1$. Setze $N = \max\{N_1, N_2\}$. Für alle $n > N$:

$$x_n c_n - y_n c_n = (x_n - y_n) c_n \geq \varepsilon/\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Das zeigt $(x_n) \cdot (c_n) > (y_n) \cdot (c_n)$.

(f) Sei $(x_n) \in \mathfrak{C}$. Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Also gibt es ein $q \in Q$ mit $x_n < q$. Und $\mathbb{Q}$ ist archimedisch, also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q < n$. Wir müssen zeigen, dass $(x_n) < \Phi(n)$. Sei $\varepsilon = n - q > 0$ und $N = 1$. Sofort folgt es dass für alle $n > N$ es gilt, $n - x_n > n - q = \varepsilon$.

(g) Weil $\Phi(\mathbb{Q})$ dicht in $\mathfrak{C}$ ist, können wir $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ finden, so dass $a_n < \Phi(p_n) < a_{n+1}$ und $b_{n+1} < \Phi(q_n) < b_n$. Seien $J_n = [\Phi(p_n), \Phi(q_n)]$ Intervalle in $\mathfrak{C}/\sim$. Bemerke $\bigcap I_n = \bigcap J_n$ und $\{J_n\}$ hat die drei Eigenschaften als $\{I_n\}$.

$x = (x_k) \in \bigcap J_n$ genauso wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Phi(p_n) \leq x$ und $x \leq \Phi(q_n)$. Wir müssen zeigen, dass (1) es ein solche x gibt und (2) dass x eindeutig in $\mathfrak{C}/\sim$ ist.

(1): Zwar funktioniert $x_k = p_k$. Es ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$: wähle $\varepsilon > 0$ beliebig und $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \varepsilon^{-1}$. Dann gibt es ein N mit

$$\Phi(q_n) - \Phi(p_n) < \Phi(k^{-1}) \ \Leftrightarrow \ q_n - p_n < k^{-1} < \varepsilon.$$

für alle $n > N$. Aber für alle $m > n$ ist $p_m \in (p_n, q_n)$. Also $|p_n - p_m| < \varepsilon$.

Es ist klar, dass $x < \Phi(q_n)$ (wähle $\varepsilon = q_n - q_{n+1}$) für alle n. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für alle $k > n$

$$x_k - \Phi(p_n)_k = x_k - p_n = (x_k - p_{n+1}) + (p_{n+1} - p_n) \geq (p_{n+1} - p_n).$$

Das zeigt $x > \Phi(p_n)$. Deshalb ist $x \in \bigcap J_n$.

(2): Seien $\varepsilon >$ beliebig und $y = (y_k) \in \bigcap J_n$. Das heißt, $\forall M$ ist $\Phi(p_M) < y < \Phi(q_M) \Rightarrow 0 < y - \Phi(p_M) < \Phi(q_M) - \Phi(p_M)$. Wähle M so dass $q_M - p_M < \varepsilon$. Nach der Ordnungsrelation auf $\mathfrak{C}$ gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k > N_1$

$$0 < \varepsilon_1 \leq y_k - p_M \leq q_M - p_M - \varepsilon_1 < q_M - p_M < \varepsilon$$

gilt. Es folgt $y_k - x_k = y_k - p_k < y_k - p_M < \varepsilon$ für $k > \max\{M, N_1\}$. Und

$$y_k - x_k = y_k - q_k + q_k - p_k > y_k - q_k > y_k - q_M = y_k - p_M - (q_M - p_M) > 0 - \varepsilon = -\varepsilon.$$

Zusammen zeigt das, dass $|y_k - x_k| < \varepsilon$ für alle $k > \max\{M, N_1\}$. Deshalb $(y_k - x_k)$ ist eine Nullfolge und $(y_k) \sim (x_k)$.